الجمهورية العراقية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة المستنصرية

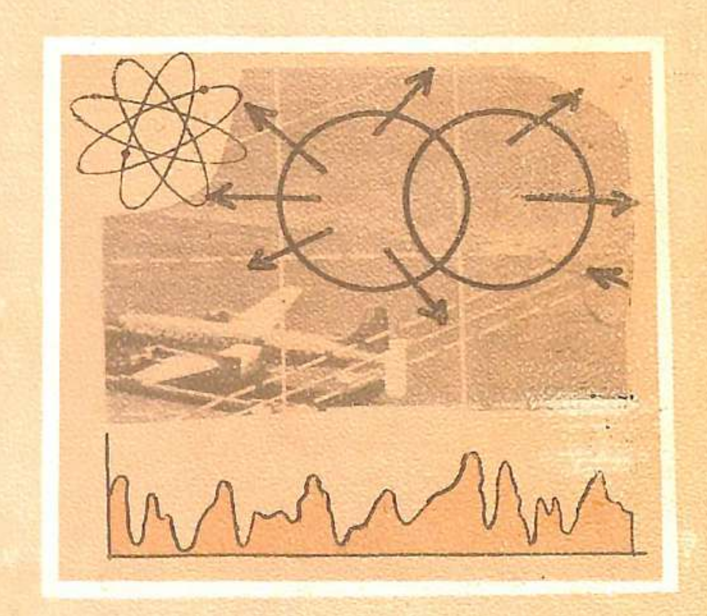
العمليات التصادفية

Stochastic Processes
Emanuel Parzen

تأليف الدكتور عمانوئيل بارزن

دراسة وتعريب الدكتور عدنان محمود حيدر
دكتوراه في الإحصاء الرياضي

عبد ذياب جزاع
ماجستير في بحوث العمليات



حسن يوسف اللويشي

بغداد 22.11.1989م



الجمهورية العراقية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة المستنصرية

العمليات التصادفية

Stochastic Processes

تأليف أ. بارزن

Emanuel Parzen

مترجم بتصرف
الدكتور عدنان محمود حميد
السيد عبد ذياب جزاع

حسن يوسف اللويشي

الطبعة الاولى ١٩٨٣ الجامعة المستنصرية - بغداد

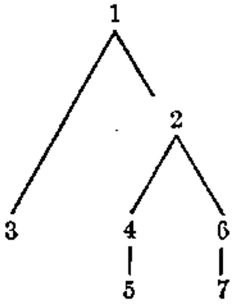
المقدمة

تعرف نظرية العمليات التصادفية بأنها الجزء الديناميكي لنظرية الاحتمال . حيث تدرس سلوك غاية مجموعه من المتغيرات العشوائية (التي تسمى بالعمليات التصادفية) ونرى ايضاً حالة اعتماد بعض المتغيرات العشوائية على البعض الاخر . العملية التصادفية عبارة عن عملية تعتمد على الزمن وتخضع لقوانين الاحتمال . هناك العديد من االأمثلة للعمليات التصادفية في الحياة العملية ومن هذه الامثلة : المسار الذي تسلكه جزيئة خلال حركتها البراونية ، نمو المجتمعات مثل مجتمع البكتريا . تردد الجزيئات المنبعثة من مصدر اشعاعي ، تدفق الكا زولين المتتابع في نظام تصفية النفط وهكذا يكون وجود العمليات التصادفية في الطبيعة بكثرة . نجد العمليات التصادفية في مختلف علوم الحياة مثل ، الطب . الفيزياء ، علم الحيوان . علم المحيطات . الاقتصاد وعلم الاجتماع .

تستخدم نظرية العمليات التصادفية في أي بحث يخص الطبيعة الاحتمالية للظواهر .

ان هذا الكتاب يهدف الى ما يلي :

تزويد القارىء بامثلة عديدة لمختلف الظواهر الاعتبارية حيث تستخدم العمليات التصادفية في عملية تكوين نماذج رياضية لتلك الظواهر .
تزويد القارىء بمفهوم لاسلوب تكوين النماذج الاحتمالية .
جعل القارىء مؤهلا لدراسة نظرية العمليات التصادفية من خلال المامه بالاساليب الرياضية المستخدمه . يستفاد من هذا الكتاب بالاضافة الى كونه كتاباً منهجياً في مختلف المراحل .بأنه يزود طالب المعرفة في هذا التخصص بالمعلومات المطلوبة .
وقد خططت دراسة اجزاء الكتاب حسب الشكل المجاور وعلى النحو الاتي





نوضح في مقدمة الكتاب نبذة مختصرة عن تطور وظهور العمليات التصادفيـــة بصورة طبيعية ودورها الاساس في مختلف المجالات العملية . نعرف في الفصل الاول مفهوم المتغير العشوائي والعملية التصادفية بالاضافة الى مقدمة حول عملية وينر وعمليـــة بواسون

ندرس في الفصل الثاني استخدامات الاحتمالات الشرطية والتوقعات الشرطية من خلال دراسة نظرية العمليات التصادفية . نناقش في الفصل الثاني المفاهيم والاساليب الاساسية في نظرية العمليات التصادفية ذات العزوم الثنائية المحدودة وتعريف العمليات الطبيعية وكذلك عمليات التغاير الثابت covariance stationary processes

ندرس في الفصل الرابع خواص عملية بواسون وتوضيح استخدام عملية بواسون للحصول على عمليات تصادفية جديدة بالاضافة الى استخدام العملية كنموذج لتعداد الحوادث العشوائية . اما في الفصل الخامس فسنناقش عمليات العـــد التجـديـدي Renewal counting processes

ندرس في الفصلين السادس والسابع متسلسلات ماركوف (المتقطعة والمستمــــرة المعلم) عمليات المواليد والوفيات ، المشيات العشوائية

بالاضافة الى تقديم مجموعة كبيرة من الامثلة التطبيقية لظواهر هذه العمليات العشوائية . يحتوي كل بند من البنود على عدد كبير من الامثلة والتمارين والمكملات وان المكمـلات عبارة عن توسيع للنظريات الموجودة في الكتاب والتي يشترط برهنتها .

سنقتصر على ذكر بعض البحوث المهمة ومؤلفيها عند وجود المكان المناسب لذلـــك . لايمكن ذكر اسماء جميع الباحثين الذين شاركوا في تطوير العمليات التصادفية بالرغم من توفر المصادر الاصلية لهذه النظرية .

نقدم شكرنا واعتزازنا لجميع الاشخاص الذين شاركوا في ظهور هذا الـكتـــاب باللغة العربية باعتباره المصدر الوحيد في العالم العربي نقدمه أمام الدارسين والباحثين من ابناء الضاد وشكراً



المحتويات

الموضوع الصفحة

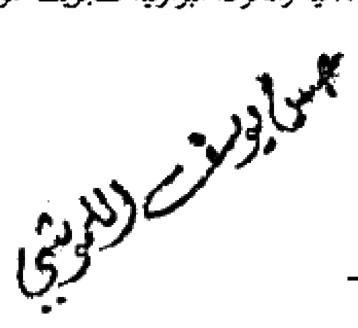
دور نظرية العمليات التصادفية

تشمل العمليات التصادفية امثلة عديدة للتطبيقات العملية ، فمثلاً العالم الذي يقوم بعملية القياسات المطلوبة في مختبر علم الارصاد الجوية يحاول التنبؤ باحوال الطقس ، يصمم مهندس انظمة السيطرة الاجهزة الخدمية (مثل اجهزة الطائرة الاوتوماتيكية او سيطرة الثرموستات)، يصمم المهندس الكهربائي نظام اتصالات (مثال ذلك الاتصال بين المستمعين والمشاهدين لبرامج الراديو او الاجهزة)التي ترسل العبارات من نقطة الى اخرى – يدرس الاقتصادي المتغيرات في الاسعار ودورات الاعمال . يدرس الطبيب النفساني حركة موجات الدماغ . ان جميع المشاكل المذكورة اعلاه لها علاقة بالعمليات التصادفية . نوضح في البنود القادمة سبب اعتبار نظرية العمليات التصادفية تخص الاحصاء الفيزيائي ، نظرية النمو للمجتمعات ، نظرية السيطرة والاتصالات ، العلوم الادارية (بحوث العمليات) وتحليل السلاسل الزمنية للحصول على التطبيقات الاخرى لنظرية العمليات التصادفية في حقول الفلك ، الاحياء ، الصناعة والطب راجع (Bartlett (1962) نيومان سكوت (1959)) .

الاحصاء الفيزياوي :

تم تطوير عدة اجزاء من نظرية العمليات التصادفية من خلال العلاقة بين دراسة . التغيرات (الترددات) والضوضاء في الانظمة الفيزيائية
(راجع ([1905], Smoluchowski [1906], Schottky [1918]))

تستخدم العمليات التصادفية كنماذج للظواهر الفيزيائية مثل الضوضاء الحرارية thermal noise في الدوائر الالكترونية والحركة البراونية لجزيئة موضوعة في سائل اوغاز .



◦ نوضح المراجع في نهاية الكتاب بصورة تفصيلية .

الحركة البراونية :

عندما تتعرض الجزيئة المتناهية الصغر الى اصطدامات من جزيئات الوسط المحيط بها فان هذه الجزيئة تتحرك حركة مستقلة وفقا لهذه الاصطدامات . تمثل دالة المتجه الناتجة $(X(t), Y(t), Z(t))$ موقع الجزيئة كدالة للزمن وتعرف بالحركة البراونية .

الضوضاء الحرارية :

تصور وجود مقاومة في شبكة الكترونية . ان حركة الالكترونات في المقاومة الموصلة ستكون عشوائية ونتيجة لهذه الحركة العشوائية سيحدث تذبذب عشوائي صغير في الفولتية $X(t)$ عبر نهايتي المقاومة . يطلق على تذبذب الفولتية $X(t)$ بالضوضاء الحرارية (ويمكن اثبات ان قانونها الاحتمالي يعتمد على المقاومة R وعلى درجة حرارة المقاومة المطلقة T فقط) .

الضوضاء الطلقية : Shot noise

تصور اتصال قطب موجب بمقاومة . ان الالكترونات ستنطلق من القطب الكاثودي المسخن وان انطلاقها يكون بصورة غير منتظمة لذلك ستحدث توليد تيار كهربائي $X(t)$ عبر المقاومة وهذا التيار يتكون من سلسلة من النبضات القصيرة ، وكل نبضة تعني مرور الالكترون من الكاثود الى الانود . يطلق على تذبذب التيار $X(t)$ بالضوضاء الطلقية .

النماذج التصادفية لنمو المجتمعات :

STOCHASTIC MODELS
FOR POPULATION GROWTH

يتغير حجم وتركيب اي مجتمع بصورة دائمية (سواء كان ذلك المجتمع كائنات حية ، الذرات في دور الانشطار ، او اضمحلال المادة الاشعاعية) ان العمليات التصادفية عبارة عن وسائل لوصف ميكانيكية هذه التذبذبات (راجع)

Bailey [1957], Bartlett [1960], Bharucha-Reid [1960], Harris [1964]).

بعض الظواهر البايولوجية التي تستفاد من العمليات التصادفية في بناء نماذج لها (i) انقراض الالقاب العائلية (ii) نتائج الطفرات الوراثية والتكوين الوراثي في نظرية النشوء والتطور (iii) توزيع مجتمعات الحيوانات والنباتات (iv) منافسة الوجود بين مجتمعين متداخلين (v) انتشار الاوبئة (vi) وظاهرة carcinogenesis

الاتصال والسيطرة :

يوجد عدد واسع من المشاكل المتعلقة بالاتصالات والسيطرة اوبالسيطرة (مثل مشاكل التتبع الذاتي لحركة الاجسام . استلام الاشارات (الراديوية) في حالة وجود التشويش الطبيعي والتشويش المصطنع اعادة الحصول على الاصوات وابعادها . تصميم الأنظمة التوجيهية . تصميم انظمة السيطرة في العمليات الصناعية . التنبؤات . تحليل التغيرات الاقتصادية . وتحليل أي نوع من انواع السجلات المثلة للمشاهدات ضمن فترة زمنية معينة) يمكن اعتبارها حالات خاصة للمشكلة العامة الآتية .

نفرض ان T تمثل مجموعة من النقاط الزمنية حيث يشاهد في كل نقطة زمنية t عائدة الى T متغير عشوائي $X(t)$. اذا علمت بوجود المشاهدات $\{X(t), t \in T\}$ وبوجود كمية تسمى Z لها علاقة بالمشاهدات في صيغة يجب توضيحها فاننا نرغب في ايجاد تقديرات مثلى واختبارات فرضية حول Z وحول الدوال المختلفة $h(Z)$ تمكننا هذه الصياغة التقريبية للمشكلة من مواجهة المشاكل الطبيعية للاتصالات والسيطرة الاتية :

التنبؤ : Prediction (extrapolation)

بعد ان نشاهد العملية التصادفية $X(t)$ ضمن الفترة الزمنية $s - L \leq t \leq s$ نستطيع ان نستنتج $X(s+\alpha)$ لاي قيمة الى $\alpha > 0$ قد تكون فترة المشاهدة L محدودة او غير محدودة .

التدرج Smoothing :

نفترض ان المشاهدات $\{X(t), s-L \leq t \leq s\}$ عبارة عن المجموع $X(t) = S(t) + N(t)$ لعمليتين تصادفيتين $S(\cdot), N(\cdot)$ تمثلان الاشارة والضوضاء على الترتيب

نحتاج ان نقدر قيمة $S(t)$ للاشارة في اي وقت t ضمن الفاصلة الزمنية $s - L \leq t \leq s$.

يشتق المصطلح *smoothing* التدرج من حقيقة كون الضوضاء $N(\cdot)$ تشتمل على وحدات ذات تردد عالٍ جداً مقارنة مع الاشارة $S(\cdot)$ نستطيع اعتبار التقدير او التخلص من الاشارة $\hat{S}(\cdot)$ كمحاولة لتوفيق منحني غير متعرج يمر خلال سجل متذبذب جداً . يطلق على مشكلة ايجاد $S(s+\alpha)$ لاي $\alpha > 0$ بمشكلة التدرج والتنبؤ .

تقدير المعالم (اكتشاف مواصفات الاشارة) :

نفترض ان المشاهدات $\{X(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ عبارة عن المجموع $X(t) = S(t) + N(t)$ حيث $S(\cdot)$ تمثل مسار حركة جسم ما (المبينة كما يلي $S(t) = x_0 + vt + (a/2)t^2$ و $N(\cdot)$ تمثل الاخطاء الحاصلة في القياسات المطلوب استخراج او تقدير سرعة الجسم v وتعجيل الجسم a . بصورة عامة . يحتاج الى تقدير الكميتين $S(t)$, $(d/dt)\,S(t)$ في أي وقت ضمن الفاصلة $0 \leq t \leq T$ وفقا للافتراض القائل بان الاشارة $S(\cdot)$ تنتمي الى صنف من الدوال المعروفة .

من الواضح ان الحلول المقترحة للمشاكل السابقة تعتمد على الافتراضات الموضوعة حول الاشارات والضوضاء المستلمة وايضاً تعتمد على المعيار الذي يخص الحل الامثل. من المعروف ان تصميم انظمة الاتصالات والسيطرة المثلى يتطلب معرفة حقيقية ان ظهور الاشارات والضوضاء في مثل هذه الانظمة عبارة عن عمليات تصادفية . وهكذا فان البداية لدراسة نظرية انظمة السيطرة والاتصالات الحديثة تتطلب دراسة نظرية العمليات التصادفية . ان هدف هذه الدراسة هو :

(i) تهيئة وسيلة للتعبير عن مشاكل السيطرة والاتصالات لان تقييم انظمة السيطرة والاتصالات يكون بالضرورة بدلالة الوسط الحسابي لتحركهما ضمن مدى معين من الحالات الموصوفة احتمالياً .

(ii) تهيئة مفهوم عام لطبيعة الافتراضات الموضوعة حول العمليات التصادفية الممثلة للاشارات والضوضاء او للضوضاء فقط .

العلوم الادارية :

ان العمليات التصادفية تمكن الباحث من ايجاد وسيلة لادارة ودراسة الاعمال كمياً وهكذا فان العمليات التصادفية تؤدي دوراً مهماً في الاتجاهات الحديثة للعلوم الادارية وبحوث العمليات . ان المجال الخصب لتطبيق العمليات التصادفية هو في السيطرة المخزنية وفي تحليل صفوف الانتظار (راجع Arrow, Karlin ، Scarf [1958], Syski [1960]

السيطرة المخزنية :

يوجد هدفان مهمان للهيئات التي تتعامل مع المخازن مثل اصحاب محلات البيع المفرد ، توزيع البيع الاجمالي ، المصانع والزبائن الذين يحتفظون بخزين من المواد الاحتياطية ، وهما (i) اتخاذ قرار لاصدار طلبية جديدة (ii) تحديد حجم تلك الطلبية . هناك حالتان يجب وضعهما في الحسبان عند وضع القرار المناسب وهما : (i) عدد الوحدات التي ستطلب من المادة خلال فترة زمنية معلومة (ii) المدة الزمنية بين اصدار الطلبية واستلامها من المجهز الخارجي . فاذا لم توجد هاتان الحالتان فبالامكان اصدار الطلبية وقت الحاجة . وفي تلك الحالة قد لانحتاج الى وضع المواد في المخازن .

ان الهدف من السيطرة المخزنية هو الاحتفاظ بعدد مناسب من الوحدات يكفي لسد دمية الطلب العشوائية بالاضافة الى المدة الزمنية العشوائية بين اصدار الطلبية واستلامها بحيث تكون التكاليف الاولية اقل مايمكن .

من مشاكل السيطرة المخزنية المثلى من خلال اعتبار انظمة الخزين المستعملة لوصف تأثيرات هذه الانظمة . فاذا علمنا بنظام خزين معين فان نتيجة تذبذب مستوى الخزين هو عبارة عن عملية تصادفية .

صفوف الانتظار :

يتكون صف الانتظار نتيجة لوصول الزبائن الى نقطة خدمية للحصول على مستلزماتهم من تلك النقطة وهذا يعني وجود حالة انتظار . المجموعة المنتظرة للحصول على خدمة من ضمنها الذين في دور استلام الخدمة يطلق عليها اسم صف الانتظار *queue*

هناك العديد من امثلة صفوف الانتظار . انتظار الاشخاص في محطة القطار ، او في المطار للحصول على تذكرة سفر . من المحتمل ان يكون هبوط الطائرات في المدرج عبارة

عن صف انتظار . انتظار السفن في الموانيء للتحميل اولتفريغ الحمولة عبارة عن صـــف انتظارسيارات الاجرة في محطة معينة عبارة عن صف انتظار . البرقيات المرسلة عبارة عن صـــف انتظـارعـددالميكانيكيين في مشتل للنباتات عبارة عن صف انتظار عندما تكون المعدات الزراعيةمخزونة في المخزن عطب مكائن الخط الانتاجي عبارة عن صـــف انتظار حيث ان هذه المكائن يجب ان تصلح من قبل ميكانيكي .

تصنف خطوط الانتظار في نظرية صفوف الانتظار وفقا الى اربع حالات : (i) توزيع الداخل (قانون احتمال الفجوه الزمنية بين وصول زبونين متتاليين) (ii) توزيع زمن الخدمة (قانون احتمال المدة الزمنية المستغرقة في خدمة زبون) (iii) عدد القنوات الخدمية (iv) دخول صف الانتظار (طبيعة اختيار الزبائن للحصول على خدمة ، ان الاختيارات الممكنة هي اول من يصل اول من يخدم ، الاختبار العشوائـــي للخدمة والخدمة وفقا للاولوية) — ندرس من خلال نظرية صفوف الانتظار تأثير الحالات الاربع المذكورة على الكميات التي تهمنا مثل طول صف الانتظار والمدة الزمنية لانتظـار الزبون الواحد للحصول على خدمة .

تحليل السلاسل الزمنية :

تسمى مجموعة المشاهدات المرتبة حسب التسلسل الزمني بالسلاسل الزمنية *time series* . تشاهد السلاسل الزمنية في مختلف الظواهر ومن قبل عدد كبير من الباحثيـــن .

امثلة على ذلك (i) مشاهدة الاقتصادي لتغير السعر السنوي للحنطة (ii) مشاهدة البايولوجي لكمية الانتاج اليومي من البيض لنوع معين من الدجاج (iii) دراسة عالـــم الانواء الجوية لكمية سقوط الامطار في مدينة معينة (iv) دراسة الفيزيائي لمستـــوى الضوضاء في نقطة معينة في المحيط (v) دراسة الاختصاصي للتأثير الحاصــــــل بين التيارات الهوائية وجنيحات الطائرة (vi) دراسة المهندس الالكتروني للضوضاء الداخلية في جهاز الاستلام (الراديوي) .

لتمثيل السلاسل الزمنية نقوم بما يأتي : نرمز لمجموعة النقاط الزمنية التي تحدث ، عندها القياسات بالرمز T في كثير من التطبيقات تكون T عبارة عن مجموعة مـــــن النقاط الزمنية المتقطعة والمتساوية المسافة (نكتب $T = \{1, 2, \cdots, N\}$ حيث N عبارة عن عدد مفردات المشاهدة) او قد تكون T عبارة عن فترة زمنية حقيقية (حيث في تلك الحالة $T = \{0 \leq t \leq L\}$ حيث L عبارة عن طول الفترة الزمنيـــة)

– نرمز للمشاهدة الحاصلة في الزمن t بالرمز $X(t)$ ان مجموعة المشاهدات $\{X(t), t \in T\}$ تسمى بالسلسلة الزمنية .

ادت دراسة السلاسل الزمنية الاقتصادية دوراً مهماً في تطور نظرية العمليات التصادفية . تأمل مثلاً اسعار بعض المواد او تبادل العملات . نستطيع تمثيل الاسعار على شكل دالة تغير $X(t)$ ان تحليل مثل هذه السلاسل الزمنية الاقتصادية هو مشكلة بحد ذاتها وقد تلاقي اهتماماً كبيراً من قبل الاقتصاديين في معرفة وتوضيح انظمة الاقتصاد الداينامية وبالتالي التنبؤ بالاسعار المقبلة .

المفهوم الاساس للنظرية الاحصائية في تحليل السلاسل الزمنية $\{X(t), t \in T\}$ هو اتخاذ السلسلة الزمنية كمشاهدة ضمن عائلة المتغيرات العشوائية $\{X(t), t \in T\}$ (راجع Wold [(1938), Bartlett (1955), Grenander Rosenblatt (1957) (1960) Hannan] اي ان لكل t تنتمي الى T تكون المشاهدة $X(t)$ عبارة عن قيمة شوهدت لمتغير عشوائي . يطلق على عائلة المتغيرات العشوائية $\{X(t), t \in T\}$ بالعملية التصادفية . بعد وضع الافتراض القائل بان السلسلة الزمنية المشاهدة $\{X(t), t \in T\}$، عبارة عن مشاهدة للعملية التصادفية $\{X(t), t \in T\}$ فانه باستخدام النظرية الاحصائية لتحليل السلاسل الزمنية نستنتج من السلسلة الزمنية المشاهدة قانون احتمال العملية التصادفية . تشابه طريقة معاملة هذه المشكلة (ولو انها اكثر تعقيداً) . الاسلوب الذي تعامل به النظرية الاحصائية للفئات مشكلة استنتاج قانون احتمال المتغير العشوائي، X حيث يوجد عدد محدود من المشاهدات المستقلة $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ...

نفترض أولاً وجود نموذج لـ $\{X(t), t \in T\}$ وذلك من أجل تحليل السلسلة الزمنية $\{X(t), t \in T\}$ وان هذا النموذج يكون محدداً نوعياً وبصورة كاملة ماعدا قيماً لمعالم معينة والتي يمكن تقديرها على أساس المعاينة والمشاهدة . وهكذا فان الخطوة الأولى في دراسة تحليل السلاسل الزمنية هو دراسة نظرية العمليات التصادفية . ان هدف هذه الدراسة هو :

(i) ايجاد اسلوب لصياغة الافتراضات حول السلسلة الزمنية .
(ii) اعطاء مفهوم دقيق لحقيقة الافتراضات الرياضية الموضوعة لجعل العمليات التصادفية نماذج للسلاسل الزمنية .

الفصل الاول

المتغيرات العشوائية والعمليات التصادفية

نعرف نظرية الاحتمال في هذا الكتاب بأنها دراسة النماذج الرياضية للظواهر العشوائية . حيث نعرف الظاهرة العشوائية بأنها عبارة عن ظاهرة اعتبارية تخضع لقوانين الاحتمال بدلاً من القوانين المحددة المعروفة . تظهر الظاهرة العشوائية خلال العمليات مثل (الحركة البراونية للجزيئة ، نمو المجتمعات مثل مجتمع البكتريا . تردد التيارات في الدوائر الكهربائية نتيجة للضوضاء الحرارية . أو الضوضاء الطلقية–أو تدفق الكازولين في نظام تصفية النفط) حيث تتطور الظاهرة على مرور الزمن بشكل معين يتحكم فيه القانون الاجتماعي تسمى مثل هذه الظواهر بالعمليات التصادفية . .

التعريف المناسب للعملية التصادفية وفقاً لنظرية الاحتمال الرياضية ولاسباب مبينة في المقدمة بانها مجموعة من المتغيرات العشوائية $\{X(t), t \epsilon T\}$ (يقرأ الحرف اليوناني ، كما يلي « ينتمي إلى » او « يتغيرمع ») تسمى المجموعة T بمجموعة دليل العملية . لاتوجد قيود موضوعة حول طبيعة T على كل حال هناك مجموعتان مهمتان هما $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$ او $T = \{0, \pm 1, \pm 2; \cdots\}$ حيث يقال في هذه الحالة ان العملية التصادفية عبارة عن عملية متقطعة المعلم *discrete parameter process*

اما في حالة $T = \{t: -\infty < t < \infty\}$ أو $T = \{t: \geq 0\}$ فيقال ان العمليـة التصادفية عبارة عن عملية مستمرة المعلم *continuous parameter process*

نناقش في هذا الفصل التعريف الدقيق للمتغيرات العشوائية والعمليات التصادفيـــة المستخدمة في هذا الكتاب . نوضح في هذا الكتاب عمليتين تصادفيتين تؤديان دوراً مهماً في نظرية العمليات التصادفية هما عمليتاوينر Wiener -بواسون Poisson

---

* ان العبارة "stochastic" اغريقية المنشأ . راجع Hagstroem (1940) للتعرف على تاريخ هذه العبارة . اما معناها في القرن السابع عشر الميلادي فكانت تعني aim at a mark استخدم كثير من الكتاب العمليـــة العشوائية او العملية العائدة الى الصدفة لتمثل العملية التصادفية "stochastic process"

1-1 المتغيرات العشوائية وقوانين الاحتمال :

المتغير العشوائي X عبارة عن كمية ذات قيمة حقيقية لها الخاصية الاتية : وجــود احتمال يطلق عليه احتمال(X تنتمي الى B) لـكل مجموعة B من الاعداد الحقيقية . أي ان X عبارة عن متغير يأخذ قيماً عشوائية (وفقاً الى توزيع احتمالي) . يعرف المتـغيـر العشوائي لنظرية الاحتمال بانه عبارة عن دالة في فضاء العينة الوصفي . باستخدام التعريف السابق نستطيع ايجاد تفاضل وتكامل المتغيرات العشوائية لـكي تتم دراســة خصــائص المتغيرات العشوائية المتكونة باستخدام عمليات تحليلية مختلفة . لاجل تعريف مـفـهـوم المتغير العشوائي بصورة اساسية نقوم بتقديم المفاهيم الاتية :

(i) فضاء العينة الوصفي
(ii) الحادثة
(iii) دالة الاحتمال .

فضاء العينة الوصفي S للظاهرة العشوائية عبارة عن فضاء وصفي لجميع نتائــــج الظاهرة الممكنة .

الحادثة : عبارة عن مجموعة من العينات الوصفية . تحدث الحادثة E اذا كان للنتيجة المشاهدة للظاهرة العشوائية عينة وصفية تنتمي الى E والعكس صحيح .

علينا ان نلاحظ ولاسباب فنية عدم اعتبار مجموعات S الجزئية بانها حوادث . كما في حالة عائلة الحوادث $\mathfrak{F}$ نستطيع تكوين عائلة مجموعات جزئية لها الخصائص الاتية :

(i) S تنتمي الى $\mathfrak{F}$
(ii) تنتمي المكملة E^c الى $\mathfrak{F}$ لـكل مجموعة E تنتمي الى $\mathfrak{F}$
(iii) ينتمي الاتحاد $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ الى $\mathfrak{F}$ لـكل تتابع من المجموعات $E_1, E_2, \cdots$ المنتمية الى $\mathfrak{F}$

• يكون هذا البند خلاصة للمفاهيم الرئيسية لنظرية الاحتمال الاولية الموضحة في الفصول 4 الى 9 في كتاب نظرية الاحتمال الحديثة وتطبيقاتها لبارزن (نيويورك ، وايلي 1960) ومن هنا سنرمز لها بالرمز *Mod Prob* عندما يراد الرجوع الى المناقشات التفصيلية والامثلة .

لاحظ ان عائلة جميع المجموعات الجزئية S تمتلك الخواص (i) الى (iii) على كل حال غالباً ما تكون هذه العائلة كبيرة بصورة غير مناسبة .

نحدد بعد ذلك دالة احتمال $P[\cdot]$ ضمن عائلة الحوادث العشوائية $\mathfrak{F}$ وذلك لاكمال الوصف الرياضي للظاهرة العشوائية . بصورة ادق لكل حادثة E عائدة الى $\mathfrak{F}$ نفرض وجود عدد يرمز له $P[E]$ ويسمى احتمال E (او احتمال حدوث E) . ان $P[E]$ تمثل احتمال (او التكرار النسبي) لان النتيجة المشاهدة للظاهرة العشوائية عنصر من عناصر E

ان $P[\cdot]$ تمثل دالة حوادث ويفترض ان تحقق ثلاث بديهيات :

بديهة 1 . $P[E] \geq 0$ لكل حادثة E
بديهة 2 . $P[S] = 1$ للحادثة الاكيدة S
بديهة 3 . لكل تابع من الحوادث $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ واللاتي تكون متنافيـــة الحدوث (اي ان لكل عددين مختلفين j ، k يكون $E_jE_k = \emptyset$ حيث $\emptyset$ تمثل الحادثة المستحيلة او المجموعة الخالية)

$$P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P[E_n].$$

يطلق على X بانه متغير عشوائي اذا كان (i) عبارة عن دالة ذات قيمة حقيقية معرفة ضمن فضاء عينة وصفي S وتكون عائلة حوادثه $\mathfrak{F}$ مجال دالة احتمال $P[\cdot]$,(ii) لكل مجموعة من مجموعات بورن B ذات الاعداد الحقيقية تكـــــون المجموعة $\{s: X(s) \varepsilon B\}$ حادثة تنتمي الى $\mathfrak{F}$.

تعرف دالة الاحتمال *probability function* لمتغير عشوائي والتـــي يرمزلها $P_X[\cdot]$ بانها دالة معرفة لكل مجموعة من مجموعات بورل B ذات الاعداد الحقيقية كمايلي :

$$P_X[B] = P[\{s: X(s) \text{ is in } B\}] = P[X \text{ is in } B]. \qquad (1.1)$$

بعبارة اخرى $P_X[B]$ عبارة عن احتمال كون القيمة المشاهدة X عائدة الـــى B

يقال ان المتغيرين العشوائيين X و Y متماثلا في التوزيع *identically distributed* اذا تساوى احتمالهما . بمعنى اخر $P_X[B] = P_Y[B]$ لجميـــع قيم مجموعة بورل B

يعرف قانون احتمال *probability law* للمتغير العشوائي X بانه دالة احتمـال $P[\cdot]$ التي تنطبق ودالة احتمال $P_X[\cdot]$ للمتغير العشوائي X

من التعريف تكون نظرية الاحتمال متعلقة بالصيغة التي تقال حول المتغير العشوائــي عندما يكون قانون الاحتمال معروفاً فقط . وهكذا عندما نصف متغيراً عشوائياً فاننــــا نحتاج فقط الى تحديد قانونه الاحتمالي .

يحدد قانون الاحتمال لاي متغير عشوائي دائما بواسطة دالة توزيعه $F_X(\cdot)$ للمتغير العشوائي X المعرفة لاي عدد حقيقي بالصيغة :

$$F_X(x) = P[X \leq x]. \qquad (1.2)$$

يقال ان المتغير العشوائي X متقطع *discrete* ان وجدت له دالة يطلق عليهـــا بدالة كتلة احتمال X ويرمزلها $p_X(\cdot)$ وبدلالتها يمكن التعبير عن دالة الاحتمـــال $P_X[\cdot]$ كمجموع ، لاي مجموعة من مجموعات بورل B

$$P_X[B] = P[X \text{ is in } B] = \sum_{\substack{\text{لجميع قيم } x \text{ العائدة} \\ \text{الى } B \text{ بحيث } p_X(x) > 0}} p_X(x). \qquad (1.3)$$

نحصل من ذلك لاي عدد حقيقي x على

$$p_X(x) = P[X = x]. \tag{1.4}$$

يقال ان المتغير العشوائي X مستمر continuous اذا وجدت له دالة يطلـــق عليها بدالة كثافة احتمال X و يرمز لها $f_X(\cdot)$ وبدلالتها يمكن التعبير عن $P_X[\cdot]$. كتكامل لاي مجموعة من مجموعات بورل B

نفترض دائما ان التكامل في المعادلة 1.5 يعرف على شكل تكامل ريمون للتأكـد من صحة هذه الحالة نحتاج ان تكون الدالة $f(\cdot)$ معرفة ومستمرة عند جميع النقــاط ماعدا عدداً محدوداً منها .

يعرف التكامل في المعادلة 1.5 لحوادث E فقط التي تكون اما فواصل intervals او اتحاداً لعدد محدود من الفواصل غير المشتركة . يعرف التكامل في المعادلة 1.5 في نظرية الاحتمال المتقدمة بواسطة نظرية التكامل المتطورة في اوائل 1900 من قبـــل

Henri Lebesgue

اذن تحتاج ان تكون الدالة $f(\cdot)$ عبارة عن حالة بورل فقط وتعني بذلك ان لاي عدد حقيقي c فان المجموعة $\{x: f(x) < c\}$ عبارة عن مجموعة من مجموعــات بورل . يمكن ان نثبت ان الدالة المستمرة عند جميع النقاط ماعدا عدداً محدوداً منها انها دالة بورل . اذا كانت B فاصلة او اتحاداً لعدد محدود من الفواصل غير المشتركة

واذا كانت $f(\cdot)$ مستمرة ضمن B فان لتكامل $f(\cdot)$ المعرف على شكل تكامل Lebesgue نفس القيمة كما لتكامل $f(\cdot)$ المعرف على شكل تكامل ريمون . تعني كلمة دالة في هذا الكتاب (مالم يذكر غير ذلك) بانها دالة بورل وان كلمة مجموعة ، (للاعداد الحقيقية) تعني مجموعة بورل .

$$P_X[B] = P[X \text{ is in } B] = \int_B f_X(x)\,dx. \tag{1.5}$$

لان

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\, dx', -\infty < x < \infty, \tag{1.6}$$

من ذلك نحصل على

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \tag{1.7}$$

لجميع الاعداد الحقيقية X التي تكون للمشتقة عندها قيم حقيقية التوقع *expectation* او المتوسط *mean* للمتغير العشوائي X الذي يرمز له بالرمز $E[X]$ يعرف كما يلي (ان وجد)

$$E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_X(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \\ \sum\limits_{\substack{\text{over all } x \text{ such} \\ \text{that } p_X(x) > 0}} x\, p_X(x) \end{cases} \tag{1.8}$$

تعتمد على كون X محددة بدالة توزيعها † دالة كثافة احتمالها اودالة كتلة الاحتمال يقال ان لتوقع X قيمة حقيقية اذا كان التكامل الناقص improper integral او المتوالية اللانهائية المبينة في المعادلة 1.8 مطلق التقارب (راجع كتاب الاحتمالات الحديثة ص 203 ،ص 250) نعبر عن ذلك بالرمز ، يكون $E[X]$ قيمة حقيقية اذا كان $E[|X|] < \infty$ والعكس صحيح

يعرف تباين *variance* X كما يلي :

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X]. \tag{1.9}$$

يعرف الانحراف المعياري *standard deviation* X كما يلي :

$$\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}. \tag{1.10}$$

تعرف الدالة المولدة للعزوم $\psi_X(\cdot)$ *moment-generating function* لاي عدد حقيقي t كما يلي :

$$\psi_X(t) = E[e^{tX}]. \tag{1.11}$$

تعرف دالة خاصية $\varphi_X(\cdot)$ *characteristic function* لاي عدد حقيقي u كما يلي :

$$\varphi_X(u) = E[e^{iuX}]. \qquad (1.12)$$

يسمى التكامل الاول في المعادلة 1.8 بتكامل ستلجز Stieltjes راجع كتاب الاحتمالات الحديثة ص 233 للحصول على تعريف هذا التكامل .

قد لايكون في بعض الاحيان للدالة المولدة للعزوم ، اوللتباين اولمتوسط المتغير العشوائي قيم محدودة . ولكن يمتلك المتغير العشوائي دالة خاصية . هناك في الحقيقة تناظر بين دوال التوزيع ودوال الخاصية من النوع واحد الى – واحد . وبذلك نتمكن من تحديد قانون احتمال المتغير العشوائي من خلال معرفة دالة خاصيته .

يمكن الحصول على دالة التوزيع ودالة كثافة الاحتمال ودالة كتلة الاحتمال بدلالة دالة الخاصية عن طريق الصيغ العكسية inversion formulas (راجع الفصل التاسع لكتاب الاحتمالات الحديثة) .

نذكر في هذا المجال صيغتين عكسيتين بدون ان تبرهنهما :

(i) لاي متغير عشوائي X سيكون

$$P[X=x] = \lim_{U\to\infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} e^{-iux}\varphi_X(u)\, du, -\infty < x < \infty; \quad (1.13)$$

(ii) اذا امكن ايجاد تكامل دالة الخاصية

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(u)|\, du < \infty, \qquad (1.14)$$

فان X سيكون مستمراً وستكون دالة كثافة احتماله كما يلي :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\varphi_X(u)\, du, -\infty < x < \infty. \qquad (1.15)$$

تعني المعادلة 1.15 ان $f_X(\cdot)$ تحويل فورير للدالة $\varphi_X(\cdot)$ وبالعكس اذا كان X مستمراً فان دالة الخاصية $\varphi_X(\cdot)$ ستكون تحويل فورير لدالة كثافة احتمالية وكما يلي :

$$\varphi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_X(x)\, dx, - \infty < u < \infty. \qquad (1.16)$$

ان المعادلتين 1.15 و 1.16 غير متماثلتين بصورة كاملة وانهما مختلفتان بالعامل $(1/2\pi)$ واشارة الأس السالبة .

نوضح في الجدولين 1.1 ، 1.2 بعض قوانين الاحتمال ، ودوال الخاصية والتباين اما الجدول 1.3 فيحتوي على بعض امثلة المتغيرات العشوائية التي تخضع لقوانين الاحتمال المذكورة اعلاه .

المتغيرات العشوائية ذات التوزيع المشترك . تكون كثير من المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \cdots, X_n$ موزعة توزيعا مشتركاً اذا كانت عبارة عن دوال تعود لفضاء عينه وصفي واحد .

تعرف دالة التوزيع المشترك $F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(\cdot, \cdot, \cdots, \cdot)$ لجميع الاعداد الحقيقية $x_1, x_2, \cdots, x_n$ كما يلي

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= P[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n] \\ &= P[\{s\colon X_1(s) \le x_1, X_2(s) \le x_2, \cdots, X_n(s) \le x_n\}]. \end{aligned}$$

تعرف دالة الخاصية المشتركة $\varphi_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(\cdot, \cdot, \cdots, \cdot)$ لجميع الاعداد الحقيقية $u_1, u_2, \cdots, u_n$ كما يلي :

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(u_1, u_2, \cdots, u_n) &= E[\exp i(u_1X_1 + \cdots + u_nX_n)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(u_1x_1 + \cdots + u_nx_n)\, dF_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

المتغيرات العشوائية المستقلة :

يقال ان المتغيرات العشوائية الموزعة بصورة مشتركة $X_1, X_2, \cdots, X_n$ مستقلة اذا كان أي من العبارات المتكافئة الاتية صادقة والعكس صحيح :

(i) معيار دالة الاحتمال : لجميع مجموعات الاعداد الحقيقية $B_1, B_2, \cdots, B_n$

$$P[X_1 \text{ is in } B_1, \cdots, X_n \text{ is in } B_n] = P[X_1 \text{ is in } B_1] \cdots P[X_n \text{ is in } B_n]. \quad (1.17)$$

(ii) معيار دالة التوزيع : لجميع الاعداد الحقيقية $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n). \qquad (1.18)$$

جدول 1.1 بعض قوانين الاحتمال المتقطع المهمة

قانون الاحتمال وقيم المعالم	دالة كتلة الاحتمال $p_X(x)$	دالة الخاصية $\varphi_X(u)$	المتوسط $E[X]$	التباين $\mathrm{Var}[X]$
ذو الحدين $n = 1, 2, \cdots$ $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n$ $0,$ ماعدا ذلك	$(pe^{iu} + q)^n$ حيث ان $q = 1 - p$	np	npq
بواسون $\lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \cdots$ $0,$ ماعدا ذلك	$e^{\lambda(e^{iu}-1)}$	λ	λ
الهندسي $0 \leq p \leq 1$	$pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, \cdots$ $0,$ ماعدا ذلك	$\frac{pe^{iu}}{1 - qe^{iu}}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
ذو الحدين السالب $r = 1, 2, \cdots$ $0 \leq p \leq 1$	$\binom{r+x-1}{x} p^r q^x, \quad x = 0, 1, \cdots$ $0,$ ماعدا ذلك	$\left(\frac{p}{1 - qe^{iu}}\right)^r$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$

جدول 1.2. بعض قوانين الاحتمال المهمة

قانون احتمال وقيم المعالم	Probability density function $f_X(x)$	دالة الخاصية $\varphi_X(u)$	المتوسط $E[X]$	التباين $\mathrm{Var}[X]$
المنتظم في الفاصلة a الى b	$\frac{1}{b-a}$, $a < x < b$ 0, ماعدا ذلك	$\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
الطبيعي $N(m,\sigma^2)$ ؛ $-\infty < m < \infty$ $\sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$	$\exp(ium - \frac{1}{2}u^2\sigma^2)$	m	σ^2
الاسي $\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ 0, ماعدا ذلك	$\left(1-\frac{iu}{\lambda}\right)^{-1}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
كاما $r > 0$ $\lambda > 0$	$\frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\left(1-\frac{iu}{\lambda}\right)^{-r}$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$
χ^2 بدرجات حرية تساوي	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{(n/2)-1}e^{-x/2}$, $x > 0$ 0, ماعدا ذلك	$(1-2iu)^{-n/2}$	n	$2n$
F بدرجات حرية m, n	$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{x^{(m/2)-1}}{\left\{1+\frac{m}{n}x\right\}^{(m+n)/2}}$, $x > 0$ 0, ماعدا ذلك		$\frac{n}{n-2}$ if $n > 2$	$\frac{2n(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ if $n > 4$

(iii) معيار بدلالة الدوال المميزة : لكل القيم الحقيقية $u_1, u_2, \cdots, u_n$ فانه : —

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(u_1, \cdots, u_n) = \varphi_{X_1}(u_1) \cdots \varphi_{X_n}(u_n). \qquad (1.19)$$

(iv) معيار بدلالة التوقع : لكل الدوال $g_1(\cdot), \cdots, g_n(\cdot)$ والتي توقعاتها كما في معادلة (1.20 تتواجد فان : —

$$E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]. \qquad (1.20)$$

جدول 1.3 أمثلة للمتغيرات العشوائية التي تتبع قوانين

الاحتمالات المبينة في الجدول 1.1 و 1.2

ذو الحدين : Binomial

عدد النجاحات في n محاولة من محاولات برنولي المستقلة حيث ان احتمال النجاح في كل محاولة p (محاولة برنولي عبارة عن نتيجتين ممكنتين احداهما تسمى نجاحاً (success) والاخرى تسمى فشلاً (failure)

بواسون Poisson

عدد امرات التي تظهر فيها الحوادث المعينة في فترة زمنية طولها دورة واحدة عندما يكون ظهور الحادثة من هذا النوع بصورة عشوائية ومعدل متوسط λ حادثة في وحدة الزمن (يقال ان الحوادث تظهر بصورة عشوائية عندما يكون ظهورها حسب عملية بواسون المعرفة في البند 1.2)

الهندسي : Geometric

عدد المحاولات المطلوبة في تتابع في محاولات برنولي المستقلة للحصول على اول نجاح علماً ان احتمال نجاح المحاولة في كل مرة p

ذو الحدين السالب : Negative binomial

عدد المرات الفاشلة في تتابع من محاولات برنولي المستقلة (احتمال النجاح في كل محاولة p قبل ظهور حادثة النجاح رقم r

المنتظم : Uniform

موقع السهام المسددة على خط محصور بين نقطتين a ، b بحيث ان التصويب دائماً يقع في الفاصلة بين النقطتين اعلاه وان اي جزئين (من الفاصلة a الى b) متساويين في الطول لهما احتمال متساو لوقوع الاصابة في احدهما .

الطبيعي : Normal

عدد النجاحات في n محاولة من محاولات برنولي المستقلة (احتمال النجاح في كل محاولة p) تتبع بصورة تقريبية قانون الاحتمال الطبيعي حيث $m = np$ ، $\sigma^2 = npq$

الاس التصاعدي : Exponential

زمن الانتظار المطلوب للحصول على اول مشاهدة لنوع معين عندما يكون ظهور الحادثة بصورة عشوائية وبمعدل متوسط λ حادثة في وحدة الزمن .

كاما : Gamma

زمن الانتظار المطلوب للحصول على الحادثة رقم r لنوع معين عندما يكون ظهور حوادث هذا النوع بصورة عشوائية بمعدل متوسط λ في وحدة الزمن .

مربع كاي χ^2 : المجموع $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ لمربع n من المتغيرات العشوائية كل منهما موزع $N(0,1)$

توزيع اف F : نسبة nU/mV حيث U و V متغيرات عشوائية مستقلة موزعة حسب توزيع مربع كاي وعدد درجات حرية m و n على الترتيب .

المتغيرات العشوائية غير المترابطة : Uncorrelated random variables.

لنفرض ان المتغيرين العشوائيين المرتبطين بالتوزيع X_1 و X_2 لهما عزمين محدودين ومن الدرجة الثانية . ان المتغيرين X_1 ، X_2 يقال لهما غير مرتبطين ببعضهما اذا كان التغاير المشترك لهما

$$\text{Cov}[X_1, X_2] = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] = E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])], \tag{1.21}$$

كما هو موضح أعلاه يأخذ قيمة الصفر أو بكلمة مرادفة اذا كان معامل الارتباط يأخذ صفراً والذي يعرف كما يلي

$$\rho(X_1,X_2) = \frac{\mathrm{Cov}[X_1,X_2]}{\sigma[X_1]\sigma[X_2]}, \tag{1.22}$$

أو بكلمة أخرى اذا كان

$$\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2]. \tag{1.23}$$

توزيع المجموع $X_1 + X_2$ لمتغيرين عشوائيين مستقلين X_1 ، X_2 :

انه لمن الواضح اذا كان X_1 ، X_2 تمثلان متغيرين عشوائيين ذو توزيع مستمر فان المتغير العشوائي $X_1 + X_2$ تمثل متغير عشوائت ذو توزيع مستمر ذو دالة كثافة احتمالية تعطى كالآتي :

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(y-x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-x) f_{X_2}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{1.24}$$

واذا كان X_1 ، X_2 تمثلان متغيران عشوائيان متقطعان مستقلان فان X_1+X_2 تمثل متغير عشوائي متقطع بدالة كتلة احتمالية تعرف كالآتي :

المجموع $X_1 + X_2$ عبارة عن متغير عشوائي متقطع له دالة كتلة احتمال مبينة ادناه :

$$\begin{aligned} p_{X_1+X_2}(y) &= \sum_x p_{X_1}(x) p_{X_2}(y-x) \\ &= \sum_x p_{X_1}(y-x) p_{X_2}(x). \end{aligned} \tag{1.25}$$

تأتي اهمية دوال الخاصية من حقيقة استخدامها في ايجاد قانون احتمال مجموع متغيرين عشوائيين مستقلين X_1 ، X_2 . بما ان توقع حاصل ضرب متغيرين عشوائيين مستقلين يساوي حاصل ضرب توقعهما سينتج مايلي :

$$E[e^{iu(X_1+X_2)}] = E[e^{iuX_1}e^{iuX_2}] = E[e^{iuX_1}]E[e^{iuX_2}]. \tag{1.26}$$

وهكذا فان دالة الخاصية لمجموع المتغيرات العشوائية المستقلة يساوي حاصل ضرب دالة خاصية كل منهما :

$$\varphi_{X_1+X_2}(u) = \varphi_{X_1}(u)\varphi_{X_2}(u). \tag{1.27}$$

نبرهن النتائج الآتية باستخدام المعادلات 1.25, 1.24 وخاصة المعادلـة 1.27

نظرية : 1A

نفرض ان X_1 ، X_2 عبارة عن متغيرين عشوائيين مستقلين

(i) اذا كان X_1 موزعاً حسب التوزيع الطبيعي بمعدل m_1 وانحراف معيـــاري σ_1 ، X_2 موزعاً حسب التوزيع الطبيعي بمعدل m_2 وانحراف معياري σ_2 فان $X_1 + X_2$ موزع حسب التوزيع الطبيعي بمعدل $m_1 + m_2$ وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

(ii) اذا علمت ان X_1 يخضع لقانون احتمال ذي الحدين بالمعلمين p, n_1 وان X_2 يخضع لقانون احتمال ذي الحدين بالمعلمين p, n_2 فان $X_1 + X_2$ يخضع لقانون احتمال ذي الحدين بالمعلمين $p , n_1 + n_2$.

(iii) اذا علمت ان X_1 موزع حسب توزيع بواسون بمعدل λ_1 وان X_2 موزع حسب توزيع بواسون بمعدل λ_2 فان $X_1 + X_2$ موزع حسب توزيع بواســـــون بمعدل $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

(iv) اذا علمت ان X_1 يتبع قانون احتمال بالمعلمين λ , r_1 وان X_2 يتبـــــع قانون احتمال كاما بالمعلمين λ, r_2 فان $X_1 + X_2$ يتبع قانون احتمال كاما بالمعلمين $\lambda, r_1 + r_2$

(v) اذا علمت ان X_1 يتبع قانون ذي الحدين السالب بالمعلمين p, r_1 وأن X_2 يتبع قانون ذي الحدين السالب بالمعلمين p, r_2 فان $X_1 + X_2$ يتبع قانون ذي الحدين السالب بالمعلمين $p , r_1 + r_2$

المكملات :

1A نعبرعن العزوم بدلالة مشتقات دوال الخاصية . نفرض ان X_1 ، X_2 عبارة عـــن متغيرين عشوائيين موزعين توزيعا مشتركا . برهن ان

$$\varphi_{X_1}(u) = \varphi_{X_1, X_2}(u, 0),$$

$$E[X_1] = \frac{1}{i} \frac{d}{du} \varphi_{X_1}(0) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial u_1} \varphi_{X_1, X_2}(0,0), \tag{1.28}$$

$$E[X_1^2] = -\frac{d^2}{du^2} \varphi_{X_1}(0) = -\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} \varphi_{X_1, X_2}(0,0), \tag{1.29}$$

$$E[X_1 X_2] = -\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \varphi_{X_1, X_2}(0,0). \tag{1.30}$$

اذا كانت العزوم موجودة حقيقياً فاننا نستطيع برهنة صحة المعادلات 1.28, 1.29, 1.30

1B نعبر عن العزوم بدلالة مشتقة لوغارتم دالة الخاصية . نفرض ان X_1 , X_2 عبارة عن متغيرين عشوائيين لهما توزيع مشترك . اثبت ان :

$$iE[X_1] = \frac{d}{du} \log \varphi_{X_1}(0), \tag{1.31}$$

$$i^2 \operatorname{Var}[X_1] = \frac{d^2}{du^2} \log \varphi_{X_1}(0), \tag{1.32}$$

$$i^2 \operatorname{Cov}[X_1, X_2] = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \, \partial u_2} \log \varphi_{X_1, X_2}(0,0). \tag{1.33}$$

نبرهن صحة المعادلات 1.31 و 1.32 عندما تكون لهم عزوم حقيقة

1C التعميم ذو البعدين لمتباينة جيفيجيف

(i) نفرض ان X_1, X_2 متغيران عشوائيان لهما متوسطان يساويان صفراً وتباينان يساويان 1 ومعامل ارتباط ρ اثبت ان

$$E[\max(X_1^2, X_2^2)] \le 1 + \sqrt{1-\rho^2}.$$

تلميح :

$$2 \max(X_1^2, X_2^2) = |X_1^2 - X_2^2| + X_1^2 + X_2^2,$$
$$E^2[|X_1^2 - X_2^2|] \le E[|X_1 - X_2|^2] E[|X_1 + X_2|^2].$$

(ii) استخدم (i) لاثبات ان لكل زوج من المتغيرات العشوائية ذات معامل الارتباط ρ ولاي $\lambda > 0$.

$$P[|X_1 - E[X_1]| \ge \lambda\sigma[X_1] \quad \text{or} \quad |X_2 - E[X_2]| \ge \lambda\sigma[X_2]]$$
$$\le \frac{1}{\lambda^2}\{1 + \sqrt{1-\rho^2}\}.$$

$$P[|X - E[X]| \ge \lambda\sigma[X]] \le \frac{1}{\lambda^2}.$$

(iii) استخدام (ii) لاستخراج الشكل الطبيعي لمتباينة جيفيجيف لاي متغير عشوائي X ذي التباين المحدود ولاي $\lambda > 0$

راجع Olkin ، Pratt (1958) في حالة تعميم الابعاد العليا لمتباينة جيفيجيف

1D حالة قانون الاعداد الكبيرة . ينص قانون الاعداد الكبيرة (الضعيف) على :

اذا كان $\{X_n\}$ عبارة عن تابع في المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع

كالمتغير العشوائي X ذي المتوسط المحدود فان

$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to E[X]$ في الاحتمال عندما $n \to \infty$

اي ان لكل $\epsilon > 0$

عندما $n \to \infty$ ، $P[\,|M_n - E[X]|\, > \epsilon] \to 0$

التوسع جزئي لهذه النتيجة في التمرين الآتي :

نفرض ان U موزع توزيعاً منتظما في الفاصلة $-\pi$ الى π . نعرف عندما $k = 1, 2, \cdots$ كما يلي :

$$X_k = \cos kU$$

ونعرف $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ عندما $n = 1, 2, \cdots$

(i) اوجد $E[X_k], \mathrm{Var}[X_k], E[S_n], \mathrm{Var}[S_n]$ تلميح :

هل ان $X_1, X_2, \cdots$ غير مترابطة ؟

افرض ان $\epsilon > 0$ جد

$$\lim_{n \to \infty} P[\,|\frac{1}{n} S_n|\, < \epsilon].$$

1E نظرية الحد المركزي :

تنص نظرية الحد المركزية (الكلاسيكية) على ما يلي : اذا كان $\{X_n\}$ تتابعاً من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي X بمتوسط وتباين محدودين . واذا كانت $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ فان

$$S_n^* = \frac{S_n - E[S_n]}{\sigma[S_n]} \to N(0,1)$$

تقترب في التوزيع عندما $n \to \infty$ بمعنى ان لكل عدد حقيقي x

$$\lim_{n \to \infty} P[S_n^* \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(1/2)y^2}\, dy.$$

لكي نفهم معنى هذه الصيغة ، نتأمل المثال الاتي . نفرض ان X_1, X_2, X_3, X_4 عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة موزعة في وحدة الطول توزيعاً منتظماً . نفرض ان

$$S_2 = X_1 + X_2, \; S_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

$$S_2^* = \frac{S_2 - E[S_2]}{\sigma[S_2]}, \; S_4^* = \frac{S_4 - E[S_4]}{\sigma[S_4]}.$$

اثبت ان

$$f_{S_2^*}(x) = \frac{1 - |x/\sqrt{6}|}{\sqrt{6}}, \quad |x| \le \sqrt{6}$$
$$= 0, \text{ ماعدا ذلك}$$

$$f_{S_4^*}(y) = \frac{(2/3) - 4|y/2\sqrt{3}|^2 + 4|y/2\sqrt{3}|^3}{\sqrt{3}}, \quad |y| \le \sqrt{3}$$
$$= \frac{\{2 - |y/\sqrt{3}|\}^3}{6\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3} \le |y| \le 2\sqrt{3}$$
$$= 0, \text{ ماعدا ذلك}$$

(ii) نفرض ان Z موزع حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي صفر وتباين يساوي 1 ارسم دوال كثافة احتمال S_2^*, S_4^*, Z في شكل واحد .

هل يمكنك القول بأن Z, S_4^* لهما نفس قانون الاحتمال تقريباً ؟ جد ذلك بصورة تقريبية $P[1 < S_4 < 3]$

التمارين :

1.1 في وعاء لحفظ السمك ثلاث سمكات ذهبية جيدة و 7 اسماك ذهبية غير جيدة التقطت القطة فلكس ثلاث سمكات من الوعاء بصورة شرسة وكانت السمكات الثلاث من النوع الجيد وبدأت باكلهن . حضر صاحب القطة بصورة غير متوقعة ورأى القطة فخاطبها بلغة تفهمها اذا امكنك اعادة اللقطة مرتين من مجموع ثلاث مرات ساجعل طعامك هذا السمك باكمله . اما اذا لم تستطيع ذلـــك فسيكون طعامك الاعتيادي الحلزون المقطع .

ماهو احتمال ان يكون طعام القطة سمكاً ؟

1.2 الاحتمال التقديري لمعرفة وجود عصيات الامراض الدرنية باستخدام اشعة x لفحص الصدر يساوي 0.6 تم اجراء استقصاء لمدينة كاملة عدد سكانها 60,000 نسمة لمعرفة عدد الناس المصابين بهذا المرض . تجري عملية الفحص على النحو الاتي : نفحص كل شخص بنوعين من الاشعة. إن كانت نتيجة اشعة واحد على الاقل موجبة فسيكون امر الشخص مشكوكاً منه . نفترض وجود 2000 شخص في المدينة مصابين بهذا المرض . نفرض ان X عبارة عن العدد الناتج مـــن الاستقصاء للاشخاص المشكوك في امرهم . اوجد متوسط متباين X

1.3 يمتلك رجل n من المفاتيح ويرغب في فتح الباب ولكنه لايعرف المفتاح الذي يصلح لفتح الباب . يقوم الرجل بتجربة المفاتيح بصورة مستقلة وعشوائية . نفرض ان X_n عبارة عن عدد المحاولات المطلوبة الى ان يحصل الرجل على المفتاح المطلوب .

اوجد $E[X_n]$ وتباين $\text{Var}[X_n]$ اذا علمت مايلي :

(i) عدم فصل المفاتيح غير المطلوبة التي تمت تجربتها عن المفاتيح المتبقية .

(ii) عزل المفاتيح غير المطلوبة بافتراض ان مفتاحاً واحداً فقط يصلح لفتح الباب .

1.4 قاذفة موجهة لتصويب هدف معين . نفترض ان توزيع المركبتين الافقية والعمودية لانحراف الاصابة عن مركز الهدف يكون حسب التوزيع الطبيعي وبصورة مستقلة حول مركز الهدف وبانحراف معياري يساوي 3 ميل نفترض ان الهدف هو اسقاط القذيفة على شكل دائري وبقطر ميل ماهو احتمال اصابة الهدف؟ وما هو اصغر عدد من القذائف المطلوبة لاصابة الهدف باحتمال في الاقل 0.99 وباصابة واحدة في الاقل .

1.5 نفرض ان للمتغيرين Y , X دالة كثافة احتمال مشتركة كمايلي :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} \quad , \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

$= 0,$ ماعدا ذلك

هل X , Y (i) غير مترابطين (ii) مستقلان ؟

1.6 اثبت ان لمجموع n من المتغيرات العشوائية المستقلة حيث كل منها يخضع لتوزيع كاما ذي المعلمين λ, r نفس توزيع مجموع rn من المتغيرات العشوائية المستقلة الموزعة توزيعاً اسياً بمتوسط $1/\lambda$

اوجد في التمارين 1.8 الى 1.13 $P[1 < X \leq 4]$ اذا علمت ان (i) $X = X_1 + X_2$, (ii) $X = \min(X_1, X_2)$ حيث X_1 ، X_2 متغيران عشوائيان متماثلا التوزيع وبصورة مستقلة لهما قانون الاحتمال المذكور في كل تمرين تلميح .

اثبت ان $P[a < \min(X_1, X_2) \leq b] = P^2[X_1 > a] - P^2[X_1 > b]$

1.7 X_1 , X_2 موزعان حسب التوزيع الطبيعي بمتوسطين متساويين وبتباين يساوي 2

1.8 X_2 , X_1 حسب توزيع بواسون بمتوسطين يساويان 2

1.9 يخضع X_2 , X_1 لقانون احتمال ذات الحدين بمتوسط يساوي 1 وتباين يساوي 0.8

1.10 يخضع X_2 , X_1 لقانون الاحتمال الاسي بمتوسط يساوي 1.5 .

1.11 يخضع X_2 , X_1 لقانون الاحتمال الهندسي بمتوسط يساوي 2

1.12 X_2 , X_1 موزعان حسب التوزيع المنتظم في الفاصلة صفر الى 3

1.13 نفرض ان X_1, X_2, X_3, X_4 عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة موزعة $N(0,1)$

نفرض ان $a_1, a_2 > 0$ نفرض ان $R_1 = a_1\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $R_2 = a_2\sqrt{X_3^2 + X_4^2}$ اثبت ان :

$$P[R_1 > R_2] = a_1^2 \ (a_1^2 + a_2^2).$$

نفرض في التمارين 1.15 الى 1.17 ان U عبارة عن متغير عشوائي موزع بصوره منتظمة في الفاصلة صفر الى 1 . نفرض ان $g(u)$ دالة غير تنازلية . تعرف عندما تكون قيم $0 \leq u \leq 1$ اوجد $g(u)$ اذا كان للمتغير العشوائي $g(U)$ توزيع مبين في التمرين المطلوب . تلميح اذا كانت :

$$F(y) = P[g(U) \leq y] = P[U \leq g^{-1}(y)] = g^{-1}(y)$$

فان $g(y) = F^{-1}(y)$ يعرف مقلوب الدالة $F^{-1}(y)$ كما يلي : $F^{-1}(y)$ تساوي اصغر قيمة من قيم x بحيث $F(x) \leq y$ (قارن ذلك مع كتاب الاحتمالات الحديثة ص 313) .

1.14 $g(U)$ عبارة عن توزيع كوشي ، اي ان $f_{g(U)}(y) = \{\pi(1 + y^2)\}^{-1}$

1.15 $g(U)$ عبارة عن التوزيع الاسي بمتوسط $1/\mu$

1.16 $g(U)$ عبارةعن التوزيع الطبيعي بمتوسط m وتباين σ^2 .

1.17 نفرض ان X عبارة عن متغير عشوائي بدالة خاصية .

$$\varphi_X(u) = \exp\{\mu(e^{\lambda(e^{iu}-1)} - 1)\}.$$

حيث λ , μ كميتان ثابتتان موجبتان . (i) اثبت ان

$$P[X=0]=e^{-\mu(1-e^{-\lambda})}.$$

تلميح . استخدم المعادلة 1.13 . (ii) اوجد $E[X]$ وتباين $\mathrm{Var}[X]$
اوجد متوسط وتباين $\cos \pi X$ في التمارين 1.18 الى1.20 حيث

1.18 X موزع $N(m,\sigma^2)$

1.19 X موزع حسب توزيع بواسون بمتوسط λ

1.20 X موزع حسب التوزيع المنتظم في الفاصلة $1-$ الى 1 .

1-2 وصف قانون احتمال العملية التصادفية :

نصف في هذا البند اساليب مختلفة لوصف العملية التصادفية . تذكر اولاً التعريف الاساسي الذي اعطيناه في بداية هذا الفصل : العملية التصادفية عبارة عن عائلة من المتغيرات العشوائية $\{X(t), t \in T\}$ معلمة بالمعلم t الذي يختلف ضمن المجموعة T

من الممكن تمثيل العملية التصادفية $\{X(t), t \in T\}$ المعرفة ضمن المجموعة T اللامنتهية للاغراض العملية بواسطة عدد محدود من الاحداثيات . احدى طرق وصف العملية التصادفية $\{X(t), t \in T\}$ عن طريق تحديد قانون الاحتمال المشترك لـ n من المتغيرات العشوائية $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ لجميع الاعداد الصحيحة n ولجميع النقاط $t_1, t_2, \cdots, t_n$ العائدة الى T

لكي نحدد قانون الاحتمال المشترك للمتغيرات العشوائية $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ نحدد اما (i) دالة التوزيع المشترك المبينة ادناه لجميع الاعداد الحقيقية $x_1, \cdots, x_n$ كما يلي :

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1, \cdots, x_n)=P[X(t_1)\leq x_1, X(t_2)\leq x_2, \cdots, X(t_n)\leq x_n] \tag{2.1}$$

أو (ii) دالة الخاصية المشتركة المبينة ادناه لجميع الاعداد الحقيقية $u_1, \cdots, u_n$
كما يلي :

$$\varphi_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(u_1, \cdots, u_n) \tag{2.2}$$
$$= E[\exp i(u_1X(t_1) + \cdots + u_nX(t_n))]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp i(u_1x_1 + \cdots + u_nx_n)\, dF_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1, \cdots, x_n).$$

يقال ان دالة التوزيع في المعادلة 2.1 ودالة الخاصية في المعادلة (2.2)لها n من الابعاد لانهما يمثلان قانون احتمال مشترك لـ n من المتغيرات العشوائية .

مثال 2A

يكون تتابع المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ عملية تصادفية (متقطعة المعلم) ذات المجموعة $T = \{1, 2, \cdots\}$. لكي نحدد قانون احتمال العملية المشترك نحدد دوال الخاصية المنفردة .

$$\{\varphi_{X_n}(u), n = 1, 2, \cdots\},$$

لان

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(u_1, \cdots, u_n) = \varphi_{X_1}(u_1) \cdots \varphi_{X_n}(u_n). \tag{2.3}$$

يكون تتابع $\{S_n\}$ للمجموعات المتعاقبة $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ للمتغيرات العشوائية المستقلة عملية تصادفية (ذات معلم متقطع) . من اجل تحديد قانون احتمال لعملية المشترك نحدد مرة ثانية دوال الخاصية المنفردة .

$$\{\varphi_{X_n}(u), n = 1, 2, \cdots\},$$

لان

$$\varphi_{S_1,\ldots,S_n}(u_1, \cdots, u_n) = \varphi_{X_1}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \tag{2.4}$$
$$\times \varphi_{X_2}(u_2 + \cdots + u_n) \cdots \varphi_{X_{n-1}}(u_{n-1} + u_n)\varphi_{X_n}(u_n).$$

نستخدم الحقيقة المبرهنة السهلة الاتية من اجل برهنة المعادلة 2.4

$$\sum_{k=1}^{n} u_kS_k = u_n(S_n - S_{n-1}) + (u_{n-1} + u_n)(S_{n-1} - S_{n-2}) \tag{2.5}$$
$$+ \cdots + (u_2 + \cdots + u_n)(S_2 - S_1) + (u_1 + \cdots + u_n)S_1.$$

يعرف التتابع $\{S_n\}$ لمجموعات المتغيرات العشوائية المستقلة المتعاقبة بالمشية العشوائية *random walk* لأننا نستطيع ان نوضح S_n بانها ازاحة الجزيئة (اوالنقطة) من موقعها الابتدائي على الخط المستقيم وذلك باعتبار الازاحة العشوائية الحاصلة عن المشية العشوائية في الخطوة k تساوي X_k يستطيع القارىء ان يرسم عينة لمسارات مشيات

عشوائية وذلك بسحب عينات من جدول الاعداد العشوائية .

طريقة ثانية لوصف العملية التصادفية بدلالة عائلة من المتغيرات العشوائية ذات قانون الاحتمال المعروف هي اعطاء صيغة لقيمة العملية في كل نقطة t .

مثال : 2B

تأمل العملية التصادفية المستمرة المعلم $\{X(t), t \geq 0\}$ المعرفة كما يلي :

$$X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \tag{2.6}$$

حيث التردد ω عبارة عن كمية ثابتة موجبة معروفة A ، B عبارة عن متغيرين عشوائيين مستقلين موزعين حسب التوزيع الطبيعي بمتوسطين وتباينين يساويان صفراً ، σ^2 على الترتيب . نستطيع الان ان نجد احتمال اي صيغة تخص العملية التصادفية ، مثلا ، سنجد لاي كمية ثابتة c

$$P\left[\int_0^{2\pi/\omega} X^2(t)\, dt > c\right].$$

افرض ان $L = 2\pi/\omega$

$$\begin{aligned}\int_0^L X^2(t)\, dt &= A^2 \int_0^L \cos^2 \omega t\, dt + 2AB \int_0^L \cos \omega t \sin \omega t\, dt + B^2 \int_0^L \sin^2 \omega t\, dt \\ &= \frac{L}{2}(A^2 + B^2).\end{aligned}$$

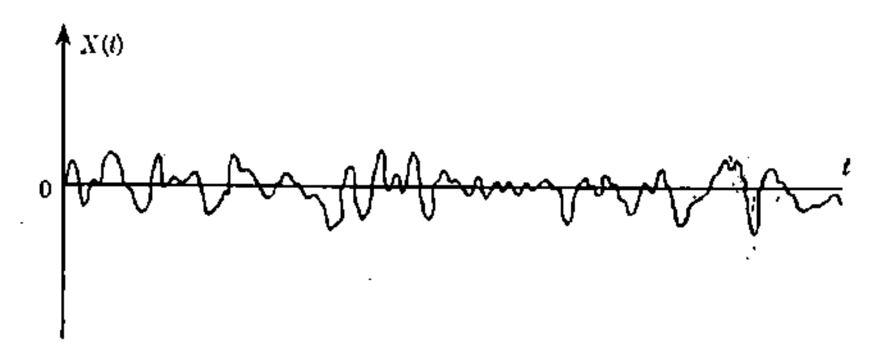
اذن

$$\begin{aligned}P\left[\int_0^{2\pi/\omega} X^2(t)\, dt > c\right] &= P\left[A^2 + B^2 > \frac{c\omega}{\pi}\right] = \int_{c\omega/\pi}^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{y}{2\sigma^2}\right\} dy \\ &= \exp\left\{-\frac{c\omega}{2\pi\sigma^2}\right\},\end{aligned}$$

لان لـ $(A^2 + B^2)/\sigma^2$ توزيع مربع كاي بدرجات حرية تساوي 2 (راجـــع الاحتمالات المتقدمة ، ص 321) .

يجب ان نشير الى ان العملية التصادفية $\{X(t), t \in T\}$ في الحقيقـــة عبارة عن دالة لعنصرين $\{X(t,s), t \in T, s \in S\}$ عندما تكون قيمة t محدودة فان $X(t, \cdot)$ عبارة عن دالة ضمن فضاء الاحتمال S أو بصورة متماثلـــة $X(t, \cdot)$ عبارة عن متغير عشوائي . من جانب آخر عندما تكون قيمة التابعة الى S محددة فان $X(\cdot, s)$ عبارة عن دالة لـ t تمثل مشاهدة ممكنة ضمن العملية التصادفية

$\{X(t), t \in T\}$ يطلق على الدالة $X(\cdot,s)$ بالـ *realization* او دالـة العينة *sample function* للعملية . عند دراستنا للعملية التصادفية نحتاج دائما الى تخطيط شكل مثالي لدالة عينة العملية (لاحظ الشكلين 1.1 ,1.2) .



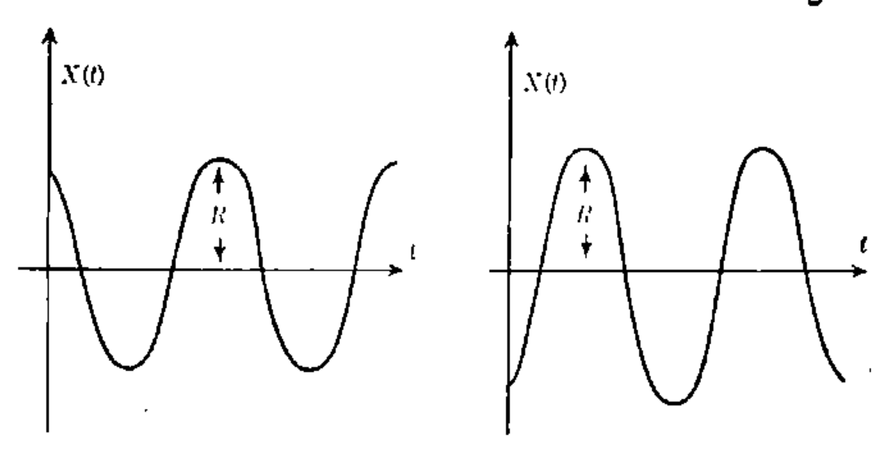
شكل 1.1 مخطط للضوضاء المثالية . توضح الضوضاءالناتجة من المقاومات باستخدام المكبر على شكل عينة عملية تصادفية منتهية $\{X(t), t \geq 0\}$

مثال 2C

تكتب العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ المعرفة بالمعادلة كمايلي

$$X(t) = R\cos(\omega t - \theta) \tag{2.7}$$

حيث $R = \sqrt{A^2 + B^2}, \ \theta = \tan^{-1}(B/A)$ على ضوء المعادلة 2.7 تكون دالة العينة لتلك العملية على شكل موجات جيب بسعة R وطور θ كماهي مرسومة في الشكل 1.2



الشكل 1.2 دالتان لعينة العملية التصادفية المثالية $X(t) = R\cos(\omega t + \theta)$

المكملات :

2A يقال ان العمليتين التصادفيتين $\{X(t), t \geq 0\}$, $\{Y(t), t \geq 0\}$ متماثلتا التوزيع اذا كان لهما نفس عائلة قوانين الاحتمال ذات الابعاد المحدودة اثبت تماثل العمليتين الاتيتين بالتوزيع

$$X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \tag{2.8}$$

حيث ω كمية ثابتة موجبة معروفة A ، B متغيران عشوائيان مستقلان موزعـــــان توزيعاً طبيعياً بمتوسطين وتباينين يساويان صفراً، σ^2 على الترتيب

$$Y(t) = R \cos(\omega t + \theta), \tag{2.9}$$

حيث ω عبارة عن كمية ثابتة معلومة R ، θ متغيران عشوائيان مستقلان ، θ موزعة بصورة منتظمة في الفاصلة من صفر الى 2π وان R موزع حسب توزيع . ريلـــي Rayleigh بدالة كثافة احتمال عند $r > 0$ تساوي

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right].$$

2B يقال ان العمليتين التصادفيتين $\{X(t), t \geq 0\}$ ، $\{Y(t), t \geq 0\}$ مستقلتان اذا كان المتجهان العشوائيان

$$(X(t_1), \cdots, X(t_n)) \quad , \quad (Y(t_1), \cdots, Y(t_n))$$

لكل عدد صحيح ولجميع النقاط الزمنية $t_1, \cdots, t_n$ مستقلين بالمعنى الاتي وهوان لجميع مجموعات (بورل) A ، B اللاتي لها n مركبة مـــن الاعداد الحقيقيـــة

$$\begin{aligned} P[(X(t_1), \cdots, X(t_n)) \in A \quad \text{and} \quad (Y(t_1), \cdots, Y(t_n)) \in B] \\ = P[(X(t_1), \cdots, X(t_n)) \in A]P[(Y(t_1), \cdots, Y(t_n)) \in B]. \end{aligned}$$

اثبت استقلالية العمليات المعرفة في المعادلتين 2.8 , 2.9 اذا علمت باستقلالية المتغيرات العشوائية A, B, R, θ

2C اثبت اذا حددنا قوانين الاحتمال ذات الابعاد n لعملية تصادفية فاننـــا سنحدد بذلك قوانين الاحتمال ذات الابعاد الاقل من n للعملية (اي مجموعة جميع التوزيعات ذات الابعاد n) . تلميح : اثبت ان لاي مجموعة $\{t_1, \cdots, t_n\}$ $m < n$,

$$\varphi_{X(t_1), \ldots, X(t_m)}(u_1, \cdots, u_m) = \varphi_{X(t_1), \ldots, X(t_n)}(u_1, \cdots, u_m, 0, \cdots, 0).$$

التمارين :

نجد في التمارين 2.1 الى 2.3 تتابعاً من المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \cdots$ والموزعة بصورة متماثلة كالمتغير العشوائي X نفرض $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ اوجد وفقاً للافتراض المبين ازاء كل تمرين حول قانون احتمال X ولاي عدد صحيح مايلي :

(i) دالة خاصية $X_1, \cdots, X_n$ المشتركة

(ii) دالة خاصية $S_1, \cdots, S_n$ المشتركة

(iii) دالة خاصية $Y_1, \cdots, Y_n$ المشتركة . حيث $Y_k = X_{k+1} - X_k$.

2.1 X عبارة عن $N(0,\sigma^2)$

2.2 X موزع حسب توزيع بواسون بمتوسط λ

2.3 X موزع حسب التوزيع الاسي بمتوسط $1/\lambda$

العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ في التمارين 2.4 الى 2.8 معرفة بصيغة واضحة بدلالة المتغيرين العشوائيين A . B وهما عبارة عن متغيرين عشوائيين موزعين توزيعاً طبيعياً مستقلاً بمتوسط يساوي صفراً وتباين يساوي σ^2 . اوجد متوسط المتغيرات العشوائية التالية :

(i) $\max_{0 \leq t \leq 1} X(t)$,

(ii) $\max_{0 \leq t \leq 1} |X(t)|$,

(iii) $\int_0^1 X(t)\, dt$,

(iv) $\int_0^1 X^2(t)\, dt$.

2.4 $X(t) = At + B$.

2.5 $X(t) = t^2 + At + B$ [omit part (ii)].

2.6 $X(t) = e^{At}$.

2.7 $X(t) = A \cos \pi t$.

2.8 $X(t) = A$ for $0 < t < \frac{1}{2}$,
$= B$ for $t > \frac{1}{2}$.

3-1 عملية وينر وعملية بواسون

THE WIENER PROCESS
AND THE POISSON PROCESS

تؤدي العمليتان التصادفيتان . عملية وينروعملية بواسون . دوراً – اساسياً في نظرية العمليات التصادفية . تكمن اهمية هاتين العمليتين في كونهما نماذج لظواهر مهمة . قبل القيام بتعريف هاتين العمليتين نوضح مفهوم العملية التصادفية ذات التزايد المستقل *independent increments*

يقال ان للعملية التصادفية المستمرة المعلم $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ تزايداً مستقلاً اذا كانت $X(0) = 0$ وان المتغيرات العشوائية لجميع اختبارات النقاط الزمنية $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$

$$X(t_1) - X(t_0), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1}) \tag{3.1}$$

مستقلة . يقال ان للعملية تزايداً مستقلاً ثابتاً *stationary independent increments* اذا كان لـ $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$

نفس توزيع $X(t_2) - X(t_1)$ لجميع اختبارات t_2, t_1 ولكل $h > 0$ بالاضافة الى شرط التزايد المستقل اعلاه .

اذا كانت العملية التصادفية ذات تزايد مستقل فانه من السهولة بمكان تحقيق مايلي :

$$\varphi_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(u_1, \cdots, u_n) = \varphi_{X(t_1)}(u_1 + \cdots + u_n) \prod_{k=2}^{n} \varphi_{X(t_k)-X(t_{k-1})}(u_k + \cdots + u_n). \tag{3.2}$$

وهكذا نستطيع استنتاج قانون الاحتمال المشترك لاي من المتغيرات العشوائية $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ اذا عرفنا قانوني الاحتمال الانفرادي لكل من $X(t)$ $X(t) - X(s)$, لجميع قيم t, s غير السالبة .

عملية وينر :

تؤدي عملية وينر دورا أساسياً في نظرية العمليات التصادفية وتطبيقاتها المختلفة . من بين تطبيقات عملية وينر هو اعتبار عملية وينر نموذجاً للحركة البراونية وللضوضاء الحرارية

في الدوائر الكهربائية . اذا استخدمنا المجهر فاننا نلاحظ ان حركة الجزيئة (مثلا ذات قطر 10^{-4}) المنغمرة في السائل اوالغاز عبارة عن حركة مستمرة غير منتظمة وواضحة . حركة هذه الجزيئة تسمى بالحركة البراونية نسبة للعالم الانكليزي النباتي روبرت براون الذي اكتشف تلك الظاهرة في سنة ١٩٢٧ (مباشرة بعد اختراع المجهر ذي العدسات الكروماتية راجع بيرن [1916] ص 84 . يمكن ملاحظة نفس الظاهرة في حالة جزيئات الدخان الموجودة في الهواء .

يعتبر تقديم مفهوم ظاهرة الحركة البراونية احد النجاحات الرئيسية لنظرية الاحصاء الميكانيكي والطاقة الحركية . اثبت انشتاين في سنة 1905 بانه بالامكان توضيح الحركة البراونية من خلال افتراض وجود جزيئات معرضة للاصطدام المستمر لجزيئات الوسط المحيط بها . بعد ذلك تم تعميم وتوسيع عمل انشتاين الموسوم وتحقيقه عمليا من قبل مختلف الفيزيائيين . (للحصول على تاريخ نظرية الحركة البراونية . راجع البحوث الموجودة في كتاب Wax [1954] وانشتاين [1956]

نفرض ان $X(t)$ عبارة عن ازاحة الجزيئة في الحركة البراونية (من نقطة البداية) بعد t وحدة زمنية $X(0) = 0$ بالغرض . تعاني الجزيئة البراونية من حركة دائمية نتيجة الاصطدامات المستمرة للجزيئة بسبب قوة مجال الوسط المحيط بالجزيئة .

نعبر عن ازاحة الجزيئة في الفاصلة الزمنية الطويلة (s,t) مقارنة مع الزمن بين الاصطدامات بمجموع عدد كبير من الازاحات الصغيرة . تستطيع ان تفترض ان $X(t) - X(s)$ موزعة حسب التوزيع الطبيعي وذلك باستخدام نظرية الحد المركزي Centrol limit theorem ونفترض بعد ذلك ان التوزيع الاحتمالي للازاحة $X(t) - X(s)$ هو نفس توزيع $X(t+h) - X(s+h)$, لكل $h > 0$ بسبب افتراضنا لاستقرار الوسيط المحيط بالجزيئة . وان قانون احتمال ازاحة الجزيئة يعتمد على الفاصلة $t - s$ فقط وليس على زمن ابتداء المشاهدة .

ان حركة الجزيئة ناتجة تماما عن اصطدام الجزيئات غير المنتظم والمتكرر بصورة غير محدودة . نوضح هذه العبارة رياضيا كما يلي : اي ان للعملية $X(t)$ التصادفية

تزايداً مستقلاً . تكون الازاحات في الفواصل الزمنية غير المشتركة مستقلة لان عدد وحجم الاصطدامات في الفواصل غير المشتركة مستقل .

نعرف الان عملية وينر(نسبة الى وينر الذي يعتبر من اوائل الباحثين في الحركة

البراونية الرياضية [1923] ، ([1930]) – يطلق على عملية وينر ايضا بعملية وينر – ليفي ، اوعملية الحركة البراونية .

يقال ان العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية وينر اذا تحقق مايلي :

(i) $\{X(t), t \geq 0\}$ لـ تزايد مستقل ثابت .

(ii) $X(t)$ موزعة حسب التوزيع الطبيعي ، لـكل $t > 0$

(iii) $E[X(t)] = 0$ لجميع قيم $t > 0$

(iv) $X(0) = 0$

بما ان لـ $X(t)$ تزايداً مستقلاً وان $X(0) = 0$
فلاجل الحصول على قانون احتمال العملية التصادفية $X(t)$ نجد قانون احتمال التزايد $X(t) - X(s)$ لـكل $s < t$ بما ان $X(t) - X(s)$ عملية طبيعية فان قانونها الاحتمالي يتحدد من خلال المتوسط والتباين لتلك العملية .

نحقق بسهولة لان $E[X(s) - X(t)] = 0$ اذن

$$\varphi_{X(t)-X(s)}(u) = \exp\{-\tfrac{1}{2} u^2 \operatorname{Var}[X(t) - X(s)]\} \qquad (3.3)$$

نثبت من خلال الحقيقة القائلة بان لـ $X(t)$ تزايداً مستقلاً . وجود كمية ثابتة موجبة نرمزلها بالرمز σ^2 تعرف لـكل $0 \leq s \leq t$ (راجع التمرين 3.15) كما يلي

$$\operatorname{Var}[X(t) - X(s)] = \sigma^2 \mid t - s \mid . \qquad (3.4)$$

وهكذا يتحدد قانون احتمال عملية وينر من خلال البديهيات (i)–(iv) الى المعلم σ^2 .

نعتبر هذا المعلم عبارة عن خاصية اعتيادية للعملية ويجب ان يتحدد من المشاهدات في حالة كون عملية وينر عبارة عن نموذج لحركة براون فان σ^2 عبارة عن متوسط مربع ازاحة الجزيئة في وحدة الزمن . اثبت انشتاين في سنة 1905 ان :

$$\sigma^2 = \frac{4RT}{Nf} \qquad (3.5)$$

حيث R عبارة عن ثابت الغاز العام ، N عبارة عن عدد افوكادرو عبارة عن الحرارة المطلقة f معامل احتكاك الوسط المحيط . ادت العلاقة 3.5 الى امكانية استخراج عدد افوكادرو من تجارب الحركة البراونية وهي النتيجة التي نال بيرن بموجبها في سنة 1926 جائزة نوبل (راجع بيرن [1916]) .

تعتبر عملية وينر في الاصل نموذجاً لحركة براون (في الاعمال التي قام بها وينر [1923] وتعتبر تقلب حركة الاسعار في اسواق العملات والمواد (في الاعمال التي قام بها Bachelier [1900] راجع Osborne [1959] للحصول على المراجع الحديثة) . وقد تبين ان هناك تطبيقا اخر لعملية وينر في ميكانيكية نظرية الكم (راجع كاك [1951, 1959] مونترول [1952] وينر [1953] . تطبيق اخر مهم لعملية بواسون يخص التوزيع المتماثل بالتقارب لاختبارات جودة توفيق دوال التوزيع (راجع اندرسن ودارلنغ [1952]) . نناقش هذا التطبيق في البند 3-5

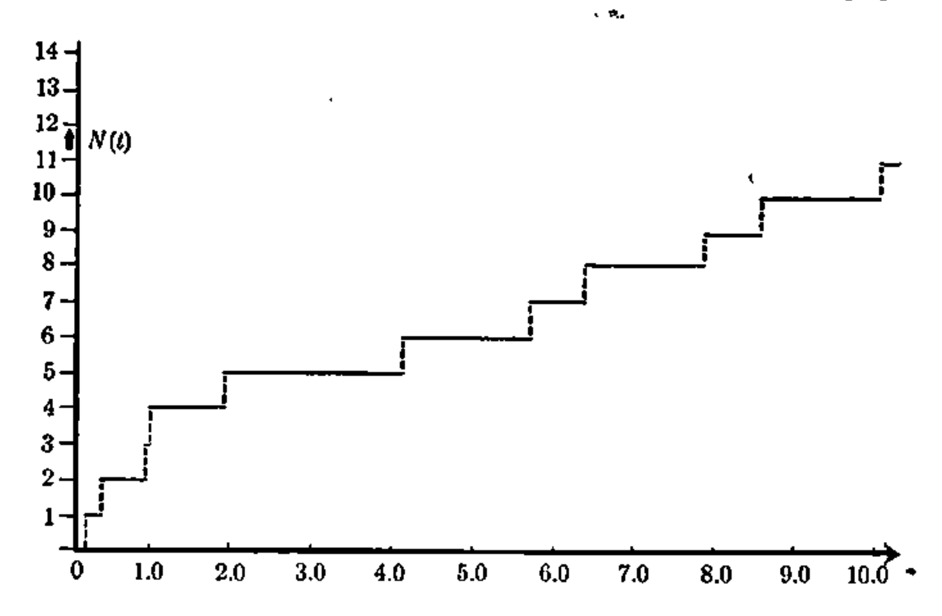
عملية بواسون :

تأمل الحوادث العشوائية مثل (1) وصول الالكترون المنبعث من الكاثود في انبوب التفريغ الى الانود . (2) وصول اشعة المنبعثة من مصدر اشعاعي الى عداد كيجر. (3) وصول الزبائن للحصول على خدمة عندما يقوم بتأدية تلك الخدمة محاسب اوبائع في محل بيع مركزي . كاتب في معمل كبير . مدرج في مطار . عمليات الشحن في الميناء . رجل الادامة في محل لتصليح المكائن . الخطوط التلفونية في مركز الاتصالات اللاسلكية او (4) وقوع الحوادث . العطب . وما شابه ذلك .

نستطيع وصف تلك الحوادث بدالة عد *counting function* $N(t)$ معرّفة لجميع قيم $0 < t$ والتي تمثل عدد الحوادث الواقعة في الفترة من صفر الى t (بدقة اكثر . في الفاصلة $[0,t]$ المفتوحة عند صفر والمغلقة عند t) . يمثل الشكل 1.3 رسم الدالة النموذجية $N(\cdot)$ نقصد بالزمن صفر هو زمن مدى مشاهدة وقوع الحوادث

العشوائية تعتبر قيمة $N(t)$ قيمة مشاهدة لمتغير عشوائي لكل زمن t تكون عائلة المتغيرات العشوائية $\{N(t), t \geq 0\}$ عملية تصادفية . ان القيم الممكنة الوحيدة لكل متغير عشوائي $N(t)$ هي عبارة عن الاعداد الصحيحة $0, 1, 2, \cdots$. يطلق على العملية التصادفية $\{N(t), t \geq 0\}$ التي تأخذ متغيراتها العشوائية القيم العددية

الصحيحة $0, 1, 2, \cdots$ فقط بعملية القيم العددية الصحيحة integer-valued process عملية القيم العددية الصحيحة المهمة بصورة خاصة هي عملية بواسون .



الشكل 1.3. دالة عينة نموذجية لعملية بواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ بمعدل متوسط $\nu = 1$ في وحدة الزمن

يقال ان عملية القيم العددية الصحيحة $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون . بمعدل متوسط (اوكثافة *intensity*) اذا تحققت الافتراضات الاتية :

(i) $\{N(t), t \geq 0\}$ لها تزايد مستقل ثابت

(ii) لاي زمنين s ، t عندما $s < t$ يكون العدد $N(t) - N(s)$ لعدد مرات وقوع الحوادث في الفاصلة s الى t موزعا حسب توزيع بواسون بمتوسط يساوي $\nu(t-s)$

وهكذا فان

$$P[N(t) - N(s) = k] = e^{-\nu(t-s)} \frac{\{\nu(t-s)\}^k}{k!}, \tag{3.6}$$

$$E[N(t) - N(s)] = \nu(t-s), \ \mathrm{Var}[N(t) - N(s)] = \nu(t-s). \tag{3.7}$$

من المعادلة 3.7 يتبين ان ν يمثل معدل متوسط وقوع الحوادث في وحدة الزمن .

توجد عدة مجموعات من الافتراضات العامة المؤدية للحصول على عملية بواسون تجد هذه الافتراضات في الفصل الرابع . تظهر الشروط المطلوب تحقيقها من قبل عملية القيم العددية الصحيحة لكي تكون عملية بواسون بكثرة . يقال ان وقوع الحوادث التي لها دالة عدا $N(\cdot)$ عبارة عن عملية بواسون يكون حسب عملية بواسون بمعدل متوسط ν او تكون من نوع بواسون بكثافة ν .

مثال 3A

اضمحلال الفاعلية الاشعاعية : Radioactive decay

تفترض جميع نظريات اضمحلال الفاعلية الاشعاعية الحديثة ان المجموعة النووية في عنصر معين تكون متماثلة ، مستقلة ، ولها احتمالات اضمحلال متساوية في وحدة الزمن. نستنتج من ذلك ان انبعاث الطاقة الاشعاعية من مصدر اشعاعي يعبر عنها بحوادث العد وانها عبارة عن عملية بواسون . مثال يحقق بالتجربة صحة الحقيقة القائلة بان عملية بواسون ملائمة لوصف اضمحلال الفاعلية الاشعاعية نجده في كتاب ايفان [1955] ص 777

مثال 3B

الضوضاء الطلقية في الصمامات الالكترونية :

Shot noise in electron tubes.

التشويش الحاصل في المكبرات الالكترونية والاجهزة والذي يكون محدوداً طبيعياً من جراء ترددات التيار في مثل هذه الاجهزة ، وهذا مايسمى بالضوضاء *noise* احد مصادر الضوضاء في الصمامات المفرغة هو الضوضاء الطليقة المتسبب نتيجة لانطلاق ، الالكترونات العشوائي من الكاثود المسخن . نفترض ان الفرق الكامن بين الكاثود والانود يكون كبيراً جداً وبذلك ستكون سرعة الالكترونات المنبعثة من الكاثود عالية بحيث ، لايحصل تجمع للالكترونات بين الكاثود والانود (وبذلك لايوجد فضاء مشحون) . نستطيع ان نثبت ان انبعاث الالكترونات من الكاثود عبارة عن حوادث من نوع بواسون (راجع Root و Davenport سنة [1958] ص 112 الى 119) وهكذا فان عدد الالكترونات المنبعثة من الكاثود خلال فترة زمنية طولها t يتبع قانون احتمال بمعلم νt حيث ν عبارة عن معدل متوسط انبعاث الالكترونات من الكاثود .

مثال 3C

عطب المكائن : Machine failures

تأمل جهازاً معيناً (مثل صمام تفريغ او ماكنة) يستعمل الى ان يتوقف عن العمل ثم يتم تصليحه (اي يجدد) اويستبدل بجهاز اخرمن نفس النوع . يفترض عمر الجهاز (طول المدة الزمنية التي يستعمل فيها الجهاز الى ان يتوقف عن العمل ان يكون متغيراً عشوائياً T ان اعمار الاجهزة المتعاقبة $T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots$ يفترض ان تكون متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع كالمتغير T عندما $t > 0$ افرض ان $N(t)$ عبارة عن عدد الاجهزة التي توقفت عن العمل في الفاصلة صفر الى t اذا كان عمر الجهاز موزعاً اسيا فاننا نستطيع ان نثبت ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون . اثبتنا في الحقيقة في الفصلين الرابع والخامس ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون اذا كان عمر الجهاز موزعاً توزيعاً اسيا والعكس صحيح .

امثلة اخرى حول حوادث من نوع بواسون واساليب معرفتها ان كانت عبارة عن عملية بواسون نجد ذلك في كتاب ديفز (1952)

عمليات بواسون في الفضاء : Poisson processes in space

عند القيام بتطوير نظريات توزيع انظمة الكواكب او توزيع مراكز المجتمعات (الحيوانات ، الاوبئة ، الخ) فانه من المناسب اعتبار مراكز الكواكب والمجتمعات عبارة عن نقاط موزعة في الفضاء .

تأمل مجموعة من النقاط الموزعة في الفضاء S حيث S عبارة عن فضاء اقليدس Euclidean ذي بعد $d \geq 1$. نفرض ان $N(R)$ ولكل منطقة R عائدة الى S تمثل عدد النقاط (محدودة اوغير محدودة) الموجودة في النقطة يقال ان مجموعة النقاط موزعة حسب ميكانيكية تصادفية اذا كان $N(R)$ متغيراً عشوائياً لكل

منطقة R (مقاسة) عائدة الى S . يقال ان مجموعة النقاط عبارة عن نوع بواسون اوإنها موزعة حسب عملية بواسون بكثافة ν اذا تحققت الافتراضات الاتية :

(i) اعداد النقاط في المناطق غير المشتركة عبارة عن متغيرات عشوائية بدقة اكثر ، تكون المتغيرات العشوائية $N(R_1), \cdots, N(R_n)$ مستقلة لاي منطقة من المناطق $R_1, R_2, \cdots, R_n$ غير المشتركة ولكل عدد صحيح .

(ii) $N(R)$ عبارة عن توزيع بواسون بمتوسط $\nu V(R)$ لكل منطقة ذات حجم محدود ، حيث $V(R)$ تمثل (عبارة عن d بعد من ابعاد اقليدس) حجم المنطقة R .

مثال 3D

التوزيع الفضائي للنباتات وللحيوانات (علم التبيوء)

Spatial distribution of plants and animals (ecology).

توصف توزيعات الحيوانات والنباتات في الفضاء بعمليات بواسون وبعمليات بواسون العمومية (المعرفة في البند 2–4) . وصف اسكيمان في سنة 195؟ ذلك جيداً : تامل وجود قطعة ارض واسعة كانت عبارة عن بحيرة ضحلة وجفت مياهها حديثا ولازالت ارض تلك المنطقة غرينية ومكشوفة لضوء الشمس وللرياح . تامل ايضا وجود بذور طائرة تحملها الرياح تعود لنوع من انواع النباتات التي ستكسو تلك المنطقة . تم تقسيم قطعة الارض الى اربعة اقسام مربعة وان عدد البذور الساقطة في الربع المربع الواحد من الارض عبارة عن متغير من نوع بواسون وان احتمال سقوط البذرة في الربع المربع صغير جداً اذا كان توزيع البذور في المنطقة حسب عملية بواسون بمعدل متوسط ν في وحدة المساحة فان لعدد البذور في المنطقة ذات المساحة A توزيع بواسون بمتوسط νA لتوضيح فائدة عملية بواسون في الفضاء تدرس النظرية الآتية :

نظرية : 3A

توزيع الجار الاقرب للجزيئات التي لها توزيع بواسون في الفضاء

Distribution of the nearest neighbor in a Poisson distribution of particles in space.

(i) اذا كانت الجزيئات موزعة في مستوى معين حسب عملية بواسون بمعدل متوسط ν في وحدة المساحة ، وكانت T عبارة عن المسافة بين جزيئة ما واقرب جزيئة مجاور لها فان $\pi\nu T^2$ موزعة حسب التوزيع الاسي بمتوسط يساوي 1 .(ii) اذا كانت الجزيئات موزعة في فضاء ذي ثلاثة ابعاد حسب عملية بواسون بمعدل متوسط ν في وحدة الحجوم وكانت عبارة عن المسافة بين الجزيئة واقرب جزيئة مجاور لها فان $(4/3)\pi\nu T^3$. موزعة حسب توزيع الاسي بمتوسط يساوي 1 وهكذا في $t > 0$

$$f_T(t) = 4\pi\nu t^2 \exp\{-\tfrac{4}{3}\pi\nu t^3\} \ . \qquad (3.8)$$

ملاحظة : تؤدي المعادلة 3.8 دوراً مهماً في الفيزياء الفلكية عند القيام بتحليل القوة المؤثرة على كوكب ما في النظام المجرى (راجع Chandrasekhar سنة [1943] ص 72)

البرهان :

نبرهن بصورة واضحة التعبير (i) فقط . لاحظ اولا ان $P[T^2 > y/\pi\nu]$. عبارة عن احتمال عدم احتواء الدائرة ذات نصف القطر $\{y/\pi\nu\}^{1/2}$ على ايز جزيئة اي تحتوي على صفر من الجزيئات ان احتمال احتواء الدائرة ذات المساحة A على صفر جزيئة يساوي $e^{-\nu A}$ بما ان للدائرة التي لها نصف قطر يساوي $\{y/\pi\nu\}^{1/2}$ مساحة تساوي y/ν نستنتج من ذلك ان :

$$P[\pi\nu T^2 > y] = e^{-y},$$

وهذا يؤدي الى الحصول على النتيجة المطلوبة .

التمارين

جد حلا للتمارين 3.1 الى 3.9 وذلك من خلال تعريف العملية التصادفية $\{N(t), t \geq 0\}$ ذات التزايد المستقل الثابت بدلالة صياغة المشكلة .

3.1 اذا كان معدل وصول الزبائن : زبون في الدقيقة فما هو احتمال وصول عدد من الزبائن خلال دقيقتين يساوي (i) 3 زبائن (ii) او اقل (iii) 3 او اكثر من 3 (v) اقل من 3

3.2 اذا كان معدل وصول الزبائن 2 زبون في الدقيقة فما هو احتمال وصول عدد من الزبائن . خلال كل دقيقة في الفترتين غير المشتركتين حيث طول كل فترة 2 دقيقة ، يساوى (i) 3 زبائن (ii) 3 او (iii) 3 او اكثر؟

3.3 اذا كان معدل وصول الزبائن 2 زبون في الدقيقة ، اوجد (i) متوسط عدد الزبائن في فترة ذات طول 5 دقائق (ii) تباين عدد الزبائن في فترة طولها 5 دقيقة (iii) احتمال وجود في الاقل زبون واحد في فترة طولها 5 دقائق .

3.4 عطب اجزاء ضرورية معينة لتشغيل ماكنة يكون حسب عملية بواسون بمعدل 1 كل 5 اسابيع . اذا علمت بوجود 2 جزء كاحتياط في المخزن وان الطلبية الجديدة ستصل بعد 9 اسابيع ماهو احتمال توقف الانتاج خلال الاسابيع التسعة القادمة لمدة اسبوع واحد او اكثر نتيجة لعدم توفر الاجزاء الاحتياطية ؟

3.5 ماهو احتمال بقاء خزين متكون من 4 وحدات من بضاعة معينة مدة اقل من يوم واحد اذا علمت ان المبيعات ستكون عبارة عن (i) عملية بواسون بمتوسط طلب يومي 4 وحدات (ii) عملية بواسون بمتوسط عبارة عن متغير عشوائي يساوي 3, 4, 5 باحتمالات 0.25, 0.50, 0.25 على الترتيب ؟

3.6 وصول الزبائن الى بائع صحف معين يكون حسب قانون احتمال بواسون بمعدل زبون واحد في الدقيقة . فما هو احتمال ذهاب 5 دقائق منذ (i) وصول الزبون الاخير اليه (ii) بين وصول الزبون القادم والزبون الاخير الذي وصل اليه ؟

3.7 وصول زبائن بائع الصحف يكون حسب عملية بواسون . بمعدل متوسط 2 زبون في الدقيقة . (i) اوجد الاحتمال الشرطي لعدم وصول زبائن خلال الدقيقتين القادمتين . اذا علمت بوصول زبون واحد او اكثر خلال الدقيقتين الماضيتين . (ii) غالبا مايقوم بائع الصحف باجراء المراهنة الاتية – بدفع الى منافسة مبلغ 1$ اذا لم يصل الزبون القادم خلال دقيقة واحدة . اما من جانب اخر فان المنافس سيدفع لبائع الصحف 1$ ماهي القيمة المتوقعة لارباح بائع الصحف من هذه المراهنة ؟

3.8 تتم مشاهدة مصدر مشع خلال اربع فواصل زمنية غير مشتركة طول كل منها 6 ثانية . تحسب عدد الجزيئات المنبعثة خلال كل فاصلة اذا اتبع انبعاث الجزيئات قانون احتمال بواسون بمعدل 0.5 جزيئة منبعثة في الثانية . اوجد احتمال احتساب (i) 3 او اكثر من الجزيئات في كل من الفواصل الزمنية الاربع (ii) او اكثر من الجزيئات في فاصلة واحدة على الاقل من الفواصل الزمنية الاربع .

3.9 تأمل عدد حوادث الانتحار في مدينة معينة حيث يحدث الانتحار بمعدل متوسط 2 في الاسبوع .
(i) اوجد احتمال حدوث حالات انتحار او اكثر في الاسبوع في المدينة (ii) اوجد عدد الاسابيع المتوقعة خلال السنة التي تحدث فيها عملية انتحار 6 اشخاص او اكثر؟ (iii) هل ستجد ذلك غريبا اذا علمت بوجود على الاقل 2 اسبوع قد

حدثت فيه عملية انتحار 6 اشخاص او اكثر ؟ (iv) اذا علمت ان الاخبار عن حوادث الانتحار يكون حادثة واحدة لكل حادثين ماهو احتمال الاخبار عن حادثين او اكثر خلال الاسبوع ؟

3.10 برهن التعبير (ii) من النظرية 3A

3.11 اوجد دالة كثافة الاحتمال لتوزيع الجزيئة القريبة المجاورة في توزيع بواسون للجزيئات في فضاء يوكليدن ذي الابعاد d

3.12 اثبت ان متوسط المسافة $E[T]$ بين جزيئة واقرب جزيئة مجاورة لها بين مجموعة من الجزيئات الموزعة عشوائيا ففي فضاء ذي ثلاثة ابعاد =

$$E[T]=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\nu^{-1/3}=0.554\nu^{-1/3}.$$

3.13 تأمل حوادث تقع ضمن الفاصلة $\infty-$ الى ∞ حسب عملية بواسون بكثافة ν . افرض ان U_t لكل $t>0$ عبارة عن المدة الزمنية منذ وقوع الحادثة الاخيرة قبل الزمن t الى t افرض ان V_t عبارة عن المدة الزمنية من t الى وقوع اول حادثة بعد t اوجد دالتي كثافة احتمال V_t ، U_t+V_t

3.14 نفرض $\{T_n\}$ عبارة عن تتابع من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع بمتوسط يساوي $\frac{1}{\nu}$ عندما $t>0$ عرف $N(t)$ لتكون العدد الصحيح الذي يحقق

$$T_1+T_2+\cdots+T_{N(t)}\le t<T_1+T_2+\cdots+T_{N(t)+1}.$$

اثبت ان $\{N(t),t\ge 0\}$ عبارة عن عملية بواسون بمعدل متوسط ν .

ملاحظة : تبرهن هذه العبارة في النظرية 2B في الفصل 5

3.15 برهن تحقق صحة المعادلة 3.4 تلميح : تحقق الدالة $f(t)=\mathrm{Var}[X(t)]$ المعادلة التالية :

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2)$$

وقد تمت مناقشة هذه الحالة في البند 4-1

3.16 نفرض $\{X(t),t\ge 0\}$ عبارة عن عملية بواسون . اثبت ان

كلما $E\left[\frac{X(t)}{t}-\nu\right]^2=\frac{\nu}{t}\to 0$ ، $t\to\infty$,

في ضوء النتيجة اعلاه هل يمكنك اعتبار $X(t)/t$ تقديراً مقبولاً للمعلم ν على اساس مشاهدة العملية $X(t)$ ضمن الفاصلة 0 إلى t ؟

3.17 مجموع عمليتين لبواسون مستقلتين عبارة عن عملية بواسون : نفرض $\{N_1(t), t \geq 0\}$, $\{N_2(t), t \geq 0\}$ عبارة عبارة عن عمليتين لبواسون مستقلتين بمعدل متوسط ν_1 ، ν_2 على التوالي ، مثلا $N_1(t)$ يمثل عدد المصابيح الكهربائية المستبدلة في دائرة معينة ، وان $N_2(t)$ تمثل عدد المصابيح الكهربائية المستبدلة في دائرة ثانية . اكتب :

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \qquad \{N(t), t \geq 0\}$$

عبارة عن عملية بواسون بمعدل متوسط $\nu = \nu_1 + \nu_2$ تأمل العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ في التمارين 3.18 الى 3.21 والمعرفة كما يلـــــي

$$X(t) = X_1(t) - X_2(t), \; t \geq 0$$

حيث ان $\{X_1(t), t \geq 0\}$, $\{X_2(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عمليتين لبواسون مستقلتين بمعدل متوسط ν_1 ، ν_2 على الترتيب مثلا $X_1(t)$ تمثل عدد سيارات الاجرة في ساحة انتظار المسافرين (في الزمن t في محطة قطار معينة) بينما $X_2(t)$ تمثل عدد المسافرين في صف الانتظار في المحطة .ان $X(t) = X_1(t) - X_2(t)$ تمثل بقية سيارات الاجرة الزائدة (التي يمكن ان تكون سالبة) .

3.18 اثبت ان لـ $\{X(t), t \geq 0\}$ تزايداً مستقلاً ثابتاً .

3.19 اثبت ان $\{X(t), t \geq 0\}$ ليست بعملية بواسون

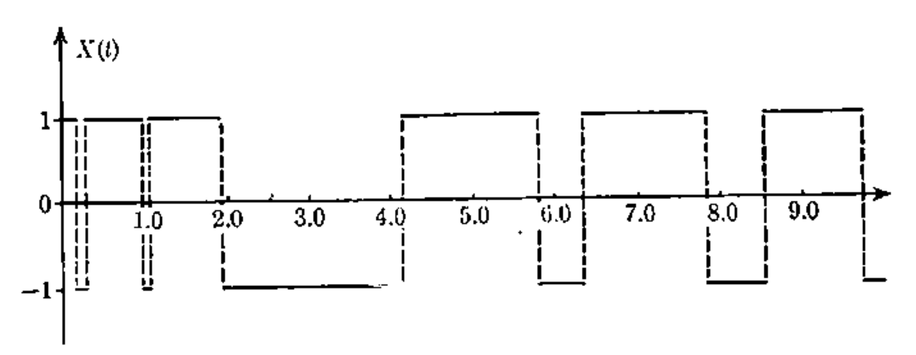
3.20 اوجد $P[X(t) - X(s) = k]$ عندما $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

3.21 اوجد $P[\,|X(t)| < c]$ غبا لكل عدد حقيقي c
استنتج ان القيمة المطلقة لزيادة عدد سيارات الاجرة على عدد المسافريـــــن ستزداد بصورة غير محدودة مع مرور الزمن .

1-4 العمليات ذات القيمتين : TWO-VALUED PROCESSES

تؤدي المتغيرات العشوائية التي تأخذ قيمتين فقط مثل النجاح او الفشل في النظرية الاحتمالية دورا مهماً .وكذلك ستكون العمليات التصادفية التي تأخذ قيمتين مهمة وان

هذين القيمتين قد تكون عددين حقيقين B ، A يطلق على مثل هذه العملية بالعملية ذات القيمتين والرسم المثالي لدالة عينة عملية ذات قيمتين في الشكل 1.4



الشكل 1.4 دالة عينة للاشارة التلغرافية العشوائية $\{X(t), t \geq 0\}$

تسمى العملية ذات القيمتين $\{X(t), t \geq 0\}$ التي تأخذ القيم الممكنة 1 ، 1− بالعملية واحد – ناقص واحد .من الواضح اذا كانت $X(t)$ عبارة عن عملية واحد – ناقص – واحد فان

$$Y(t) = \frac{B+A}{2} + \left\{\frac{B-A}{2}\right\} X(t) \tag{4.1}$$

عبارة عن عملية ذات قومتين وتكون قيمتها الممكنة B ، A

نستطيع ان نمثل العملية واحد – ناقص واحد $\{X(t), t \geq 0\}$ كما يلي :
نعرف $N(0) = 0$ افرض $N(t)$ عندما $t > 0$ عدد مرات تبديل قيمة العملية واحد ناقص واحد $X(\cdot)$ في الفترة الزمنية $(0,t]$ تسمى العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ بعملية الحد للعملية واحد ناقص واحد وهكذا فان

$$X(t) = X(0)(-1)^{N(t)}, \tag{4.2}$$

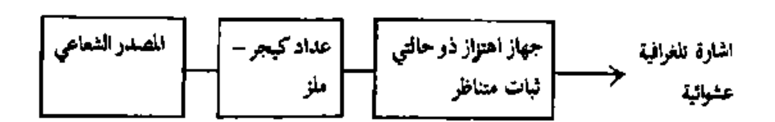
حيث $X(0)$ عبارة عن القيمة الابتدائية للعملية واحد – ناقص واحد .

اذا كانت $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون فيطلق على العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ بالاشارة التلغرافية العشوائية *random telegraph signal*
بصورة ادق يطلق على العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ بالاشارة التلغرافية العشوائية اذا كانت قيمتها (i) 1 ، 1− على التوالي (ii) ازمنة تبديل قيم العملية موزعة حسب

توزيع عملية بواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ بمعدل متوسط ν القيمة الابتدائية $X(0)$ عبارة عن متغير عشوائي مستقل عن عملية بواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ بحيث يكون

$$P[X(0) = 1] = P[X(0) = -1] = \tfrac{1}{2}. \tag{4.3}$$

بالامكان نسبيا تكوين وسيلة فيزيائية لتوليد الاشارة التلغرافية العشوائية الشكل 1.5 يمثل مخطط الوسيلة المعطاة . تؤدي الاشارات التلغرافية العشوائية دورا مهما في تكوين مولدات الاشارة العشوائية (راجع كتاب Wonham ، Fuller [1958]) .



الشكل 1.5 شكل تخطيطي لمولد الاشارة التلغرافية العشوائية

نظرية : 4A

نفرض $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية ذات قيمتين عدديتين صحيحتين بتزايد مستقل . عندما $t > 0$ افرض

$$X(t) = X(0)(-1)^{N(t)} \tag{4.4}$$

حيث $X(0)$ القيمة الابتدائية المختارة بصورة مستقلة عن العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ وباحتمال متساو لان تكون 1 ، -1 ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية واحد – ناقص – واحد بدالة خاصية ذات بعدين

$$\varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1, u_2) = \cos u_1 \cos u_2 - K(t_1, t_2) \sin u_1 \sin u_2, \tag{4.5}$$

حيثما $t_1 < t_2$ يعرف مايلي

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= P[N(t_2) - N(t_1) \text{ زوجي }] - P[N(t_2) - N(t_1) \text{ فردي }] \\ &= \varphi_{N(t_2)-N(t_1)}(\pi) \end{aligned} \tag{4.6}$$

ملاحظة :

بما ان $e^{\pi i}=-1$ فان لكل متغير عشوائي N ذي قيمتين عدديتين صحيحتين يكون

$$\begin{aligned}P[N\ \text{زوجي}]-P[N\ \text{فردي}]&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P[N=n]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{i\pi n}P[N=n]=E[e^{i\pi N}]=\varphi_N(\pi).\quad(4.7)\end{aligned}$$

في حالة عملية بواسون $\{N(t), t\geq 0\}$ بكثافة ν

$$\varphi_{N(t_2)-N(t_1)}(u)=e^{\nu(t_2-t_1)(e^{iu}-1)},$$

بحيث

$$K(t_1,t_2)=\varphi_{N(t_2)-N(t_1)}(\pi)=e^{-2\nu(t_2-t_1)}.\qquad(4.8)$$

البرهان : نلاحظ اولاً في حالة $(t_1<t_2)$

$$\begin{aligned}P[X(t_1)=1]&\\&=P[X(0)=1]P[N(t_1)\ \text{زوجي}]+P[X(0)=-1]P[N(t_1)\ \text{فردي}]\\&=\tfrac{1}{2}\{P[N(t_1)\ \text{زوجي}]+P[N(t_1)\ \text{فردي}]\}=\tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

بنفس الطريقة $P[X(t_1)=-1]=1/2$ بحيث $X(t_1)$ يساوي 1 -1
اذن

$$\begin{aligned}p_{1,1}=P[X(t_1)=1,X(t_2)=1]&=P[X(t_1)=1\ ,\ N(t_2)-N(t_1)\ \text{زوجي}]\\&=\tfrac{1}{2}P[N(t_2)-N(t_1)\ \text{زوجي}].\end{aligned}$$

بنفس الطريقة

$$\begin{aligned}p_{-1,-1}&=P[X(t_1)=-1,X(t_2)=-1]=\tfrac{1}{2}P[N(t_2)-N(t_1)\ \text{زوجي}],\\p_{1,-1}&=P[X(t_1)=1,X(t_2)=-1]=\tfrac{1}{2}P[N(t_2)-N(t_1)\ \text{فردي}],\\p_{-1,1}&=P[X(t_1)=-1,X(t_2)=1]=\tfrac{1}{2}P[N(t_2)-N(t_1)\ \text{فردي}].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2)&=e^{i(u_1+u_2)}p_{1,1}+e^{-i(u_1+u_2)}p_{-1,-1}\\&\quad+e^{i(u_1-u_2)}p_{1,-1}+e^{-i(u_1-u_2)}p_{-1,1}\\&=\cos(u_1+u_2)P[N(t_2)-N(t_1)\ \text{زوجي}]\\&\quad+\cos(u_1-u_2)P[N(t_2)-N(t_1)\ \text{فردي}].\end{aligned}$$

نحصل على النتيجة المطلوبة لان

$$\cos(u_1 \pm u_2) = \cos u_1 \cos u_2 \mp \sin u_1 \sin u_2$$

طريقة اخرى لتمثيل العملية ذات القيمتين بدلالة الزمن بين تبديل القيم. نفرض $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية صفر – واحد (اي العملية التصادفية التي تأخذ القيم صفر، 1 فقط)

مثال : 4A

نموذج لنظام تعويل A model for system reliability

تأمل نظاماً يكون في احدى الحالتين حالةالعمل"on"او حالة التوقف" off"يشتغل الجهاز لفترة عشوائية قبل عطبه اذا كان في حالة «عمل» وسيتوقف لفترة عشوائية قبل تصليحه اذا كان في حالة « توقف» . نفرض ان $X(t)$ تساوي 1 او صفرا حسب كون الجهاز في حالة «عمل» اوحالة توقف في الزمن t .

مثال 4B

نموذج للضوضاء في شبه الموصل المتكونة نتيجة للمصايد الالكترونية

A model for semi-conductor noise produced by electron "traps."

يقال ان الالكترون المتحرك في شبه الموصل يكون في حالة طاقة اوحالة مقيدة . يفترض في الالكترون ان يكون بصورة طليقة لفترة زمنية عشوائية موزعة حسب التوزيع الاسي بمتوسط $1/\mu$ ومن ثم في حالة مقيدة لمدة زمنية عشوائية موزعة اسيا وبمتوسط نعرف $X(t)$ لتكون 1 او صفرا حسب كون الالكترون طلقاً او مقيداً في الزمن t . (راجع Machlup [1954]) للحصول على صيغة اخرى لنموذج الضوضاء في شبه الموصل) .

نفترض بعض الافتراضات المطلوبة حول الحركة الزمنية بين تبديل القيم وذلك لكي تتم دراسة خصائص عملية الصفر – واحد الموصوفة في المثالين 4A ، 4B ان الافتراضات الاتية تكون في بعض الاحيان معقولة :

(i) الازمنة بين تبديل القيم عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة.

(ii) الزمن المستغرق للتبديل من صفر الى 1 موزع حسب المتغير العشوائي U وان الزمن المستغرق للتبديل من 1 الى صفر وزع حسب المتغير العشوائي V

تهمنا الخصائص الاتية في معظم تطبيقات عمليات الصفر – واحد .

(a) الاحتمالان

$$P[X(t) = 0] \quad \text{and} \quad P[X(t) = 1] \tag{4.9}$$

لكون $X(t)$ في الزمن t في كل من الحالتين الممكنتين

(b) قانون احتمال نسبة الوقت $\beta(t)$ الذي تكون للعملية قيمة تساوي1خلال الفاصلة صفر الى t

بعد تقديم مفهوم التكامل التصادفي (راجع البند 3-3) ستمثل $\beta(t)$ على شكل التكامل الاتي :

$$\beta(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(t')\, dt'. \tag{4.10}$$

نحتاج في كثيرمن التطبيقات ان نعرف حركة عملية الصفر – واحد $\{X(t), t \geq 0\}$ بعد ان تكون في حالة عمل لمدة زمنية طويلة عندما تكون قيمة t كبيرة) باستخدام نظريات الغاية من النظرية الاحتمالية سنحصل على الاجوبة المبسطة .

نظرية : 4B .

نفرض $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية الصفر – واحد التي تحقق الافتراضات (i) ، (ii) اذا كان لكل من U ، V متوسطان محدودان وان ل $U + V$ توزيعاً مستمراً فان

$$\text{غا}_{t \to \infty} P[X(t) = 0] = \frac{E[U]}{E[U] + E[V]},$$
$$\text{غا}_{t \to \infty} P[X(t) = 1] = \frac{E[V]}{E[U] + E[V]}. \tag{4.11}$$

اذا كان لكل من U ، V تباين محدود ، فان النسبة $\beta(t)$ للفتره من صفر الى t التي تكون فيها للعملية قيمة تساوي 1 متقاربة بالتماثل مع التوزيع الطبيعي بمعنى ان لكل عدد حقيقي x

$$\text{غا}_{t \to \infty} P\left[\sqrt{t}\, \frac{(\beta(t) - m)}{\sigma} \leq x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(1/2)y^2}\, dy, \tag{4.12}$$

حيث

$$m = \frac{E[V]}{E[U] + E[V]},$$
$$\sigma^2 = \frac{E^2[V]\,\mathrm{Var}[U] + E^2[U]\,\mathrm{Var}[V]}{\{E[U] + E[V]\}^3}. \qquad (4.13)$$

برهان المعادلة 4.11 في البند 3-5. اما برهان المعادلة 4.12 فخارج نطاق هذا الكتاب (راجع ريني Rényi [1957]) يعطي برهان النظرية ذات العلاقة في البند 10-6

مشكلة المرور بنقطة الصفر : The zero crossing problem

تظهر العمليات ذات القيمتين بطريقة ثالثة . نفرض $\{Z(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية (مثل عملية وينر) يهمنا في هذا المجال تحديد احتمال عدداً لمرات التي تأخذ العملية التصادفية فيها قيمة تساوي صفراً في الفاصلة a الى b . اذ عرفنا

$$\begin{aligned} X(t) &= 1 \qquad && Z(t) \geq 0 \\ &= -1 \qquad && Z(t) < 0, \end{aligned} \qquad (4.14)$$

فان عدد مرات تبديل $X(t)$ لقيمتها في الفاصلة a الى b يساوي عدد مرات الصفر الذي تأخذه $Z(t)$ في هذه الفاصلة . ان المشكلة هي ايجاد قانون احتمال عدد اصفار العملية التصادفية ، اوعدد تبديل قيمة العملية ذات القيمتين وان هذه المشكلة لازالت لم نجد لها حلاً (المراجع التي تحتوي على بعض النتائج المعروفة هي
Longuet-Higgins [1958], Mac- Fadden [1958], Slepian [1961].

كان هدفنا في تقديم مفهوم العملية ذات القيمتين ذا هدفين . توضيح بعض الاسئلة المهمة من جانب ومن جانب اخر حاولنا اعطاء فكرة عن انواع الاجوبة المتوفرة . حتى ولوكان ذلك البرهان خارج نطاق هذا الكتاب . نامل باتباع مثل هذه الانواع من الطرق ان يكون القارىء قادرا على ايجاد حلول بعض التطبيقات العملية وايضا تأهيل القارىء بالمعرفة الكافية للقيام بدراسات اخرى لنظرية العمليات التصادفية .

عبد ابو يوسف العويشي

الفصل الثاني

الاحتمال الشرطي والتوقع الشرطي :

Conditional probability and conditional expectation

للمفاهيم الاتية اهمية خاصة في نظرية العمليات التصادفية

(i) الاحتمال الشرطي

$$P[A \mid X = x]$$

للحادثة A اذا علمنا (قيمة) المتغير العشوائي X ؛ (ii) دالة التوزيع الشرطي

$$F_{Y|X}(y \mid x) = P[Y \le y \mid X = x]$$

لمتغير عشوائي Y اذا علمنا (قيمة) المتغير العشوائي X ، (iii) التوقع الشرطي

$$E[Y \mid X = x]$$

لمتغير عشوائي Y اذا علمنا (قيمة) المتغير العشوائي X

في حالة التعامل مع هذه المفاهيم نحتاج الى استخدام رياضيات معقدة تقع خارج نطاق هذا الكتاب . من اجل دراسة نظرية العمليات التصادفية يجب معرفة كيفية استخدام وتطبيق الاحتمالات الشرطية والتوقعات الشرطية . يؤهل هذا الفصل القارىء بمثل هذه الاساليب .

2-1 القيم الشرطية للمتغيرات العشوائية المتقطعة :

نعرف الاحتمال الشرطي $P[A \mid B]$ لحادثة A اذا علمنا حادثة B كما يلي :

$$P[A \mid B] = \frac{P[AB]}{P[B]} \qquad P[B] > 0, \tag{1.1}$$

$$\text{قيمة غير معرفة} \qquad P[B] = 0.$$

الطريقة الاعتيادية لتعريف الاحتمال الشرطي $P[A \mid X = x]$ لحادثة A اذا علمنا ان الحادثة $[X = x]$ تعني قيمة المتغير العشوائي المشاهدة X تساوي x كما يلي

$$P[A \mid X = x] = \frac{P[A \text{ حدوث } , X = x]}{P[X = x]} \quad \text{if} \quad P[X = x] > 0, \quad (1.2)$$

لايمكن ان يكون التعريف اعلاه منطقياً عندما يكون المتغير العشوائي X مستمرا لان في هذه الحالة $P[X = x]$ تساوي صفراً لجميع قيمx. اما في حالة المتغير المتقطع فان التعريف $P[A \mid X = x]$ في المعادلة 1.2 سيكون مقبولاً لان المجموعة قيم X المسماة . في$P[X = x] > 0$احتمال يساوي 1 لاحتوائها على قيمة X المشاهدة . نعرف $P[A \mid X = x]$ لاعداد x الحقيقية فقط والتي تظهر كقيم مشاهدة لـ x

تعرف دالة التوزيع الشرطي $F_{Y|X}(\cdot \mid \cdot)$ لمتغير عشوائي X اذا علمنا قيمة المتغير العشوائي المتقطع Y كما يلي

$$F_{Y|X}(y \mid x) = P[Y \leq y \mid X = x] = \frac{P[Y \leq y \quad , \quad X = x]}{P[X = x]} \quad (1.3)$$

لجميع قيم y وقيم x حيث

$$P[X = x] > 0$$

يعرف المتوسط Y الشرطي . اذا كان $X = x$ بانه متوسط دالة التوزيع الشرطي $F_{Y|X}(\cdot \mid x)$ نكتب المتوسط الشرطي بالرموز على شكل تكامل ستلجز :

$$\begin{aligned} E[Y \mid X = x] &= \int_{-\infty}^{\infty} y \, dF_{Y|X}(y \mid x) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} P\left[\frac{k}{2^n} < Y \leq \frac{k+1}{2^n} \mid X = x\right]. \end{aligned}$$

نستطيع تعريف دالة كتلة احتمال X الشرطي ، اذا كان Y معلوما ، وان X ، Y متغيران متقطعان مشتركان كما يلي .

$$p_{Y|X}(y \mid x) = P[Y = y \mid X = x] = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} \quad (1.4)$$

اذا كانت x بحيث $p_X(x) > 0$ فان العلاقةبين دالة كتلة الاتصال الشرطي ودالــة

التوزيع الشرطي كما يلي :

$$F_{Y|X}(y \mid x) = \sum_{\text{over } y' \leq y} p_{Y|X}(y' \mid x). \tag{1.5}$$

لكي تبرهن المعادلة 1.5 سنستخدم ما يلي :

$$P[Y \leq y \quad \text{and} \quad X = x] = \sum_{\text{over } y' \leq y} p_{X,Y}(y', x).$$

يكتب توقع Y المشروط اذا علمنا X على ضوء المعادلتين 1.5, 1.3 وفي حالة المتغيرين العشوائيين المتقطعين المشتركين Y, X (عندما $p_X(x) > 0$) كما يلي :

$$E[Y \mid X = x] = \sum_{\text{over } y} y \, p_{Y|X}(y \mid x). \tag{1.6}$$

قبل ان نعرف مفاهيم التوزيعات الشرطية والتوقعات الشرطية للمتغيرات العشوائية .غير المتقطعة . دعنا نوضح استخدام هذه المفاهيم .

لمفهوم التوقع الشرطي، استخدامان رئيسان .اولا يؤدي دورا مهماً في الاجابة على كثير من مشاكل التنبؤ وبصورة عامة في تحليل السلاسل الزمنية وفي نظرية اتخاذ القرارات الاحصائية ثانياً : تكمن اهميته في توفير الاساليب المطلوبة لتحليل المتغيرات العشوائية التابعة في سلسلة من الخطوات .تأتي اهمية التوقع الشرطي من الخصائص الاساسية الثلاث المبينة في النظرية 1A (والتي سنذكرها بصورة مفصلة «بالرغم من برهنتهـا في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة المشتركة فقط .)

نظرية : 1A

خواص التوقع الشرطي الثلاث الرئيسية :

نفرض Y ، X عبارة عن متغيرين عشوائيين موزعين توزيعا مشتركا وان $g(x,y)$ عبارة عن دالة ذات متغيرين .نفترض ان $E[Y]$ محدود وان X متقطع .افرض ان $E[Y \mid X = x]$ تمثل توقع Y الشرطي اذا علمت ان $X = x$ (يعرف هذا المفهوم في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة المشتركة المعادلة 1.6 وبصورة عامة يعرف من البند 2-2) (i) ان .

$$E[Y] = \sum_{\text{over } x} E[Y \mid X = x] p_X(x); \qquad (1.7)$$

بعبارة ثانية يمكن الحصول على متوسط Y غير المشروط من خلال معرفة توقع X المشروط اذا علمنا Y. (ii) لجميع قيم x في حالة $p_X(x) > 0$

(1.8) اذا كان كل من X ، Y مستقلين $E[Y \mid X = x] = E[Y]$

بعبارة اخرى ، التوقع الشرطي $E[Y \mid X = x]$ لايعتمد على x ويساوي المتوسط غير الشرطي $E[Y]$ اذا كان X ، Y مستقلين (iii) لجميع قيم x بحيث يكون $p_X(x) > 0$

$$E[g(X,Y) \mid X = x] = E[g(x,Y) \mid X = x] \qquad (1.9)$$

لاي دالة $g(\cdot,\cdot)$ بحيث يكون التوقع $E[g(X,Y)]$ ذو قيمة حقيقية.

للتعبير عن المعادلة 1.9 نفرض ان $U = g(X,Y)$ ، $V = g(x,Y)$ وان $g(X,Y)$ عبارة عن متغير عشوائي دالة لـ X و Y بينما $g(x,Y)$ عبارة عن دالة Y فقط (لاي عدد حقيقي معلوم x)

معنى المعادلة (1.9) هو ان المتوسط الشرطي لـ U اذا علمنا ان $X = x$ يساوي المتوسط الشرطي لـ V اذا علمنا ان $X = x$

البرهان :

نبرهن المعادلات 1.7 الى 1.9 للمتغيرات العشوائية المتقطعة المشتركة X ، Y فقط لكي نبرهن معادلة 1.7 نكتب

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{\text{over } x} \sum_{\text{over } y} y\, p_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_{\text{over } x} p_X(x) \sum_{\text{over } y} y\, p_{Y|X}(y \mid x) \qquad (1.10) \\ &= \sum_{\text{over } x} p_X(x) E[Y \mid X = x]. \end{aligned}$$

نحقق صحة المعادلة 1.8 باستخدام المعادلة 1.6 والحقيقة الاتية وهي ان لجميع قيم x بحيث $p_X(x) > 0$ يكون

$$p_{Y|X}(y \mid x) = p_Y(y) \quad \text{مستقلين } Y \text{ ، } X \text{ عندما} \tag{1.11}$$

لكي نبرهن معادلة 1.9 لاحظ ان

$$P[U=u, X=x] = \sum_{\substack{\text{over } y \text{ such} \\ \text{that } g(x,y)=u}} p_{X,Y}(x,y), \tag{1.12}$$

$$P[V=v,\ X=x] = \sum_{\substack{\text{over } y \text{ such} \\ \text{that } g(x,y)=v}} p_{X,Y}(x,y). \tag{1.13}$$

وعلى هذا الاساس فان لجميع الاعداد الحقيقية u ، x بحيث $p_X(x) > 0$

فان

$$p_{U|X}(u \mid x) = p_{V|X}(u \mid x), \tag{1.14}$$

$$E[U \mid X=x] = \sum_{\text{over } u} u\, p_{U|X}(u \mid x) = \sum_{\text{over } u} u\, p_{V|X}(u \mid x) = E[V \mid X = x], \tag{1.15}$$

وهو المطلوب اثباته

يجب ان نلاحظ ان مفهوم الاحتمال الشرطي عبارة عن حالة خاصة لمفهوم التوقع الشرطي . اذا اعطيت حادثة A والتي هي عبارة عن مجموعة جزئية لفضاء عينة وصفي S . تعرف دالة الدليل I_A للحادثة A ضمن S كما يلي :

$$\begin{aligned} I_A(s) &= 1 \text{ if } s \text{ belongs to } A, \\ &= 0 \text{ if } s \text{ does not belong to } A. \end{aligned} \tag{1.16}$$

نحقق مايلي بسهولة :

$$E[I_A \mid X = x] = P[\{I_A = 1\} \mid X = x] = P[A \mid X = x]. \tag{1.17}$$

وهكذا نحصل من النظرية 1A على النتائج المستخدمة بصورة متكررة .

النظرية 1B:

الخواص الاساسية الثلاث للاحتمالات الشرطية :

لكل حادثة A لكل متغيرين عشوائيين X، Y لكل دالة g ولكل مجموعة B

$$P[A] = \sum_{\text{over } x} P[A \mid X = x]\, p_X(x) \tag{1.18}$$

$$P[Y \text{ is in } B \mid X = x] = P[Y \text{ is in } B] \tag{1.19}$$

اذا كان X ، Y مستقلين .

$$P[g(X,Y) \text{ is in } B \mid X = x] = P[g(x,Y) \text{ is in } B \mid X = x]. \tag{1.20}$$

نوضح في المثالين 1B, 1A استخدام النظريتين 1A ، 1B وبنفس الوقت توضح استخدام معادلات الدوال مثل معادلات الفرقة في حل مشاكل الاحتمال .

مثال 1A

نفرض رمي قطعة نقود n مرة مستقلة حيث ظهور الصورة تكون باحتمال p نفرض ان S_n عدد مرات ظهور الصورة . اوجد الاحتمال P_n لكون العدد S_n زوجياً .

الحل :

نجد حل هذه المشكلة وذلك بايجاد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي S_n الذي سيكون ذا الحدين

$$P[S_n = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n,$$

حيث $q = 1 - p$ وهكذا فان

$$\begin{aligned} P_n &= \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \cdots \\ &= \tfrac{1}{2}\{(p+q)^n + (q-p)^n\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{1 + (q-p)^n\}. \end{aligned}$$

طريقة ثانية لايجاد P_n هي الحصول على معادلة الفرق التي تحققها P_n نوضح اولا الخطوات الرئيسية في المناقشة . تحدث نتيجة ظهور عدد زوجي لحادثة رمي قطعة النقود مرة في احدى الطريقتين :

في الرمية الاولى نحصل على كتابة وفي التجارب $(n-1)$ الباقية نحصل على عدد زوجي من الصورة او في الرمية الاولى نحصل على صورة وفي التجارب $(n-1)$ الباقية نحصل على عدد فردي من الصورة وعلى هذا الاساس عندما

$$P_n = qP_{n-1} + p(1 - P_{n-1}) = (q-p)P_{n-1} + p, \tag{1.21}$$

حيث $P_1 = q$ باستعمال المكملة 1A فان حل المعادلة الذي يكون كما يلي

$$P_n = \left(q - \frac{p}{1-(q-p)}\right)(q-p)^{n-1} + \frac{p}{1-(q-p)}, \qquad (1.22)$$
$$= \tfrac{1}{2}(1+(q-p)^n).$$

نوضح الان الاشتقاق الكامل للمعادلة 1.21 عندما $j = 1, 2, \cdots, n$
نفرض X_j يساوي 1 او صفراً من نتيجة الرمية رقم j باستعمال المعادلة 1.18 نحصل على

$$P_n = P[S_n \text{زوجي}] = P[S_n \text{زوجي} \mid X_1 = 0]P[X_1 = 0] + P[S_n \text{زوجي} \mid X_1 = 1]P[X_1 = 1]. \qquad (1.23)$$

من المعادلة 1.20, 1.19 نستنتج

$$P[S_n \text{زوجي} \mid X_1 = 0] = P\left[\sum_{j=1}^{n} X_j \text{زوجي} \mid X_1 = 0\right] = P\left[\sum_{j=2}^{n} X_j \text{زوجي}\right] = P[S_{n-1}\text{زوجي}] = P_{n-1}. \qquad (1.24)$$

وبنفس الطريقة فان

$$P[S_n \text{زوجي} \mid X_1 = 1] = P[S_{n-1}\text{فردي}] = 1 - P_{n-1}. \qquad (1.25)$$

من المعادلات 1.23 الى 1.25 نحصل على المعادلة 1.21

مثال 1B

تأمل n حالة من الحالات المستقلة لتجربة ذات احتمال نجاح يساوي p افرض ان S_n عدد مرات الحصول على نجاح في المحاولات n
اوجد $E[S_n]$

الحل :
بما ان عدد النجاحات S_n في n في تجارب برنولي معروف باتباعه لقانون احتمال ذي الحدين ، فان متوسط مبين في الصيغة التالية :

$$E[S_n] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np.$$

نوضح الان كيفية ايجاد $E[S_n]$ باستعمال معادلات الفرق .

نوضح ذلك كما يلي . افرض ان $m_n = E[S_n]$ عبارة عن العدد المتوقع النجاحات في n تجربة من تجارب برنولي . لذلك فان عدد النجاحات المتوقعة في التجارب $(n-1)$ بعدما علمنا ان التجارب الاولى كانت تساوي m_{n-1} اذا كانت التجربة الاولى نجاحاً فان $m_n = 1 + m_{n-1}$ بينما اذا كانت التجربة الاولى فشلا فان $m_n = m_{n-1}$ اذن عندما فان

$$m_n = p(1+m_{n-1}) + qm_{n-1} = (p+q)m_{n-1} + p = m_{n-1} + p. \quad (1.26)$$

بما ان $m_1 = p$ فأن $m_n = m_{n-k} + kp = m_1 + (n-1)\,p = np$

بالامكان استخراج معادلة الفرق 1.26 بصورة كاملة كما يلي .

بدلالة المتوسطات الشرطية وفي المعادلة 1.7 نكتب مايلي

$$E[S_n] = E[S_n \mid X_1 = 0]P[X_1 = 0] + E[S_n \mid X_1 = 1]P[X_1 = 1]. \quad (1.27)$$

يمكن الان ان نستنتج المعادلة 1.26 باستعمال الحقائق المبينة ادناه

$$\begin{aligned} E[S_n \mid X_1 = 0] &= E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n \mid X_1 = 0] \\ &= E[X_2] + \cdots + E[X_n] = E[S_{n-1}], \\ E[S_n \mid X_1 = 1] &= E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n \mid X_1 = 1] \\ &= 1 + E[X_2] + \cdots + E[X_n] = 1 + E[S_{n-1}]. \end{aligned}$$

نوضح مفهوم استعمال الاحتمال الشرطي في نظرية العمليات التصادفية ، من خلال دراسة خواص العملية التصادفية المتكونة من عملية بدواسون بواسطة الاختيار العشوائي .

وجود عملية بواسون عندما يكون الاختبار عشوائياً :

من الجوانب المهمة لعملية بواسون هو وجودها عندما يكون الاختيار عشوائيا اذا كان حدوث الحوادث من نوع بواسون بافتراض عدم حساب جميع الحوادث حدوث كل حادثة يكون باحتمال p يتبين في نظرية k ان الحوادث المحسوبة (المعدودة) لا تزال من نوع بواسون .

نظرية : 1C

نفرض ان $N(t)$ عدد الحوادث من نوع بواسون التي تحدث في فترة طولها من صفر الى t عندما يكون $t \geq 0$ اذا كانت $N(\cdot)$ عملية بواسون بمعدل متوسط.

ν عندما يكون احتمال حساب الحادثة التي تحدث يساوي p وان حساب حادثـة يكون مستقلا عن حساب الحوادث الاخرى ويكون ايضا مستقلا عن العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ اذا كانت $M(t)$ عدد الحوادث المسجلة والمحسوبة) في الفترة من صفر الى t فان $\{M(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون ذات معلم $\mu = \nu p$

البرهان :

من الواضح ان $M(\cdot)$ عبارة عن عملية لها تزايد مستقل . لاجل برهنة النظريـة يجب ان نبرهن

$$P[M(t) - M(s) = k] = e^{-\nu p(t-s)} \frac{[\nu p(t-s)]^k}{k!}.$$

لاي زمن $0 \leq s < t$ ولاي عدد صحيح k

اذا علمت بوقوع n حادثة في الفترة من s الى فان عدد الحوادث المسجلة (المحسوبة) تحقق قانون احتمال ذي الحدين

$$P[M(t) - M(s) = k \mid N(t) - N(s) = n] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (1.28)$$

بما ان

$$P[N(t) - N(s) = n] = e^{-\nu(t-s)} \frac{[\nu(t-s)]^n}{n!},$$

فان

$$\begin{aligned} P[M(t) - M(s) = k] &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\nu(t-s)} \frac{[\nu(t-s)]^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\nu(t-s)}}{k!} [p\nu(t-s)]^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[q\nu(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{[p\nu(t-s)]^k}{k!} e^{-\nu(t-s)} e^{(1-p)\nu(t-s)}, \end{aligned}$$

وهو المطلوب اثباته

مثال : 1C

العدد المعيب :

نفرض وصول الجزيئات الى عداد كيجي Geiger counter حسب عملية بواسون بمعدل متوسط ν من وحدة الزمن. عداد كيجي يعمل بواسطة نظام تسجيل

يحتوي على اداة تعمل بصورة صحيحة باحتمال p نتيجة لذلك فان احتمال تسجيل كل جزيئة تصل الى العداد يساوي p نفرض $M(t)$ عدد الجزيئات المحسوبة في الفترة من صفر الى t علماً بان $t \geq 0$ من ذلك يتبين أن $M(\cdot)$ عبارة عن عملية بواسون العددية بمعدل متوسط $\mu = \nu p$

مثال : 1D

اختبار الزبائن : Selective customers

اذا كان مرور الزبائن من امام محل حسب عملية بواسون بمعدل متوسط ν واذا كان احتمال دخول الزبون الواحد الى المحل p فان احتمال دخول الزبائن الى المحل يكون حسب عملية بواسون وبمعدل متوسط νp .

مثال : 1E

علم التبيوء : Ecology

نفرض احتمال انبات جميع البذور المذكورة في المثال 3D في الفصل الاول يساوي p فقط .

. يكون توزيع البذور القابلة للانبات حسب عملية بواسون .
اذا استخدمنا النظرية 1C فان الشرط الضروري الواجب تحقيقه هو المعادلة 1.28 فالتعريف المناسب للاختبار العشوائي هو تحقيق صحة المعادلة 1.28 يتضح من المثال 1E في الفصل 5 عملية اختبار تبدو عشوائية لكنها لاتحقق المعادلة 1.28 .

المكملات :

1A حل معادلة الفرق :
اثبت أنه اذا كان تابع الاعداد $p_1, p_2, \cdots$ يحقق معادلة الفرق

$$p_n = a p_{n-1}, \quad n = 2, 3, \cdots, \tag{1.29}$$

حيث a كمية ثابتة معلومة فان

$$p_n = p_1 a^{n-1},\ n =$$

ثم بين ان لمعادلة الفرق $p_n = ap_{n-1} + b$ الحل المبين ادناه :

$$p_n = \left(p_1 - \frac{b}{1-a}\right)a^{n-1} + \frac{b}{1-a} \qquad a \neq 1,$$
$$= (n-1)b + p_1 \qquad a = 1.$$

b ، a كميتان ثابتتان

تلميح : اثبت ان $\left(p_n' = p_n - \frac{b}{1-a}\right)$ يحقق المعادلة 1.29

تمارين :

1.1 Y ، X متغيران عشوائيان مستقلان من نوع بواسون . اثبت ان توزيع التغير X المشروط يكون حسب توزيع ذات الحدين اذا علمت قيمة $X + Y$

1.2 اذا كان X موزعاً حسب توزيع بواسون λ وان توزيع الشرطي عندما يكون $X = n$ عبارة عن توزيع ذات الحدين بالمعلمين p, n . برهن ان Y موزع حسب توزيع بواسون بمتوسط λp

1.3 توزيع ذات الحدين وتوزيع عملية بواسون I .لاي عملية لبواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ اثبت ان

$$P[N(s) = k \mid N(t) = n] = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.$$

1.4 توزيع ذات الحدين وتوزيع عملية بواسون II . اذا كانت $\{N_1(t), t \geq 0\}$ ، $\{N_2(t), t \geq 0\}$ عمليتين مستقلتين من نوع بواسون ، بكثافة ν_1 ، ν_2 على الترتيب فان لاي $0 \leq k \leq n$
برهن ان

$$P[N_1(t) = k \mid N_1(t) + N_2(t) = n] = \binom{n}{k}p^k q^{n-k},$$

حيث

$$p = \frac{1}{1 + (\nu_2/\nu_1)},\ q = 1 - p.$$

1.5 اعد حل التمرين 3.8 في الفصل الاول وفقا لافتراض كون نظام العدادات معيناً وانه يسجل الجزيئة باحتمال 2/3 فقط .

1.6 يسجل كل شعاع واصل الى عداد كيجر باحتمال $1/3$ نفرض وصول الاشعة حسب عملية بواسون بمعدل متوسط 6 في الثانية . اذا كانت Z عدد الاشعة المسجلة خلال نصف دقيقة . اوجد $E[Z]$, $\text{Var}[Z]$, $P[Z \geq 2]$.

1.7 اذا كان مرور الاشخاص من امام مطعم حسب عملية بواسون بمعدل متوسط 1,000 في الساعة . نفرض ان دخول الشخص الى المطعم باحتمال 0.01 نفرض ان Z عدد الاشخاص الذين يدخلون الى المطعم خلال فترة 10 دقائق . اوجد

$$E[Z], \text{Var}[Z], P\,[Z \geq 2].$$

مشاكل زمن – الانتظار :

اعتبرنا في المثالين 1A ، 1B الاحتمالات المعرفة لعدد محدود من التجارب.هناك العديد من المشاكل ذات العلاقة بالعدد المحدود من التجارب تكون معادلات الفرق بصورة خاصةمهمة في معالجة مثل هذا النوع من المشاكل .

1.8 اثبت ان العدد المتوقع للحصول على r نجاح في سلسلة من محاولات برنولي المستقلة المعادة يساوي r/p حيث p احتمال النجاح في كل محاولة $r = 1, 2, \cdots$
تلميح : افرض ان S_r زمن الانتظار للحصول على r نجاح افرض ان $m_r = E[S_r]$
استخدم الحقيقة الاتية :

$$m_r = p(1 + m_{r-1}) + q(1 + m_r)$$

اوجد معادلة فرقتحققها m_r, $r = 2, 3, \cdots$ بماان $m_1 = 1/p$ فان $m_r = r/p$

لكي تبرهن ان $m_1 = 1/p$ اثبت ان m_1 تحقق المعادلة .

$$m_1 = p + q(m_1 + 1) = 1 + qm_1.$$

1.9 حرامي بغداد :

وضع حرامي بغداد في زنزانة ذات ثلاثة ابواب . احد هذه الابواب يؤدي الى نفق يحتاج يوماً كاملاً لقطعه ويؤدي له للرجوع الى نفس الزنزانة . الباب الثاني يؤدي به الى نفق مشابه (يطلق عليه اسم النفق الطويل) يحتاج ثلاثة ايام لقطعه ، اما الباب الثالث فيؤدي الى اطلاق سراحه . نفرض ان الحرامي سيختار احد هذه الابواب باحتمال متساوٍ (يختار الباب دون معرفة نتيجة ذلك الطريق) . اوجد

متوسط عدد الايام التي يقضيها الحرامي في السجن منذ لحظة اختيارة لاحد الابواب للخروج الى ان يختار الباب الذي يؤدي الى اطلاق سراحه .

1.10 ثلاثة لواعيب (نرمز لهم بالرموز a, b, c) يلعبون لعبة حسب القواعد التالية : يلعب في بداية اللعبة a مع b ويكون c خارج اللعبة .

يلاعب الفائزمن اللاعبين a ، b اللاعب c الفائز في اللعبة الثانية سيعيد اللعبة مع الخاسر في اللعبة الاولى ، تستمر العملية الى ان يتم الحصول على لاعب فائز في مرتين متتاليتين ، نفرض انA, B, Cتمثل الحوادث اللاتي عبارة عن فوز a او b او c اوجد (i) $P[A], P[B], P[C]$ (ii) اوجد متوسط المدة الزمنية للعبة .

2-2 ايجاد الشرط في حالة المتغير العشوائي المستمر :

اذا كان لكل من X ، Y دالة كثافة احتمال مشتركة $f_{X,Y}(x,y)$ فان دالة كثافة الاحتمال الشرطي $f_{Y|X}(\cdot|\cdot)$ للمتغير Y اذا علمت قيمة المتغير X لجميع قيم x , y بشرط ان تكون $f_X(x) > 0$ كما يلي :

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy}. \qquad (2.1)$$

ان للمجموعة $C = \{x: f_X(x) > 0\}$ احتمالاً لاحتوائها على قيمة X المشاهدة ، لذلك سنعتبر المعادلة 2.1 تعريفاً مقبلاً لان معظم قيم المشاهدة تقع في المجموعة C حيث نرغب في تعريف $f_{Y|X}(y \mid x)$ عند النقاط x فقط التي تكون قيماً للمتغير المشاهد X .

يعرف التوقع الشرطي للمتغير العشوائي Y اذا كانت قيمة X معلومة كما يلي : (لجميع قيم x عندما $f_X(x) > 0$)

$$E[Y \mid X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|X}(y \mid x)\, dy. \qquad (2.2)$$

أن المعادلتين 2.1 ، 2.2 عبارة عن تعريفين مناسبين للمتغيرين العشوائيين المستمرين مقارنة بالتعريفين المبينين في المعادلتين 1.4 ، 1.6 على الترتيب . نوضح هذه التعاريف بصورة واضحة من خلال دراسة خواص مفاهيم التوقعات الشرطية والاحتمالات الشرطية .

نعرف مفهوم الاحتمال الشرطي $P[A \mid X = x]$ للحادثة اذا علمت قيمة المتغير العشوائي X المشاهدة تساوي x من خلال تعريف مفهوم التوقعات الشرطية على ضوء المعادلة 1.17 خاصيتان مهمتان من خواص $E[Y \mid X = x]$ هما :

(i) نحصل على $E[Y]$ اذا اخذنا التوقع $E[Y \mid X = x]$ نسبة الى قانون احتمال X نعبر عن ذلك كما يلي :

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} E[Y \mid X = x] \, dF_X(x). \qquad (2.3)$$

(ii) التوقع الشرطي $E[g(X)Y \mid X = x]$ للمتغير العشوائي وهو عبارة عن حاصل ضرب Y ودالة $g(X)$ للمتغير X يجب أن يحقق

$$E[g(X)Y \mid X = x] = g(x)E[Y \mid X = x] \qquad (2.4)$$

لاي متغير عشوائي $g(X)$ وهو عبارة عن دالة لـ X بحيث يكون $E[g(X)Y]$ محدوداً بجمع المعادلتين 2.4, 2.3 نحصل على مفهوم التوقع الشرطي في حالة الدوال المناسبة $g(X)$ وكما يلي :

$$E[g(X)Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)E[Y \mid X = x] \, dF_X(x). \qquad (2.5)$$

نقوم الآن بتقديم مفهوم $E[Y \mid X]$ ليمثل دالة X التي تساوي الى $E[Y \mid X = x]$ عندما $X = x$ ونكتب بعد ذلك المعادلة 2.5 في الشكل الآتي .

$$E[g(X)Y] = E[g(X)E[Y \mid X]] \qquad (2.6)$$

لاي متغير عشوائي $g(X)$ وهو عبارة عن دالة لـ X بحيث يكون التوقع $E[g(X)Y]$ محدوداً .

يمكن أن نثبت أن المعادلة 2.6 توافينا باسلوب عـام لتعريف التوقعات الشرطية. اذا اعطيت متغيراً عشوائياً ومتغير عشوائي X بمتوسطين محدودين خاص باستخدام النظرية المسماة بنظرية Radon-Nikodym (راجع Doob [1953] من 17 ، [1960] Loève ص 341) فانه هذا يعني وجود دالة وحيدة لـ X يرمز لها بالرمز $E[Y \mid X]$ تحقق المعادلة 2.6 لجميع الدوال $g(\cdot)$ عندما يكون التوقع في جهة المعادلة 2.6 اليسرى قيمة معينة .

بعبارة ثانية : لم نعرف بصورة واضحة في نظريات الاحتمالات المتقدمة مفهومي التوقع الشرطي والاحتمال الشرطي وانما عرفنا هما ضمنا كدالة لـ X تحقق المعادلة 2.6

نوضح هذه الخطوات من خلال عرض مفهوم التوقع الشرطي (راجع النظرية 3A) الذي له جميع الخواص المطلوبة .

لكي نوضح استخدام التعاريف البديهية للتوقعات الشرطية المبينة في المعادلة 2.6 نقوم بايجاد التوقع المشروط المبين في المعادلة 2.2 في حالة المتغيرين العشوائيين المستمرين المشتركين X ، Y .

ان

$$E[Yg(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yg(x) \, f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy. \tag{2.7}$$

من جانب ثانٍ ، نفرض ان $E[Y \mid X]$ تمثل دالة X المعرفة في المعادلـة 2.2 ان

$$\begin{aligned} E[E[Y \mid X]g(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[Y \mid X = x] g(x) \, f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[Y \mid X = x] g(x) \, f_X(x) \, dx, \end{aligned} \tag{2.8}$$

لان $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \, dy = f_X(x)$ من المعادلتين 2.2 ، 2.8 نحصل عـلى

$$E[E[Y \mid X]g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y \, f_{Y|X}(y \mid x) \, dy \right\} g(x) \, f_X(x) \, dx. \tag{2.9}$$

عندما نكتب المعادلة 2.9 فاننا نستخدم الحقيقة الاساسية وهي اذا كان $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$ دالتان لـ x حيث

$$P[X \text{ ينتمي الى } \{x: \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\}] = 1, \tag{2.10}$$

فان

$$E[\varphi_1(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \, dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x) \, dF_X(x) = E[\varphi_2(X)]. \tag{2.11}$$

من المعادلتين 2.9 ، 2.1 نحصل على

$$E[E[Y \mid X]g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yg(x) \, f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy. \tag{2.12}$$

نحقق دالة X المعرفة في جهة المعادلة 2.2 المعادلة 2.6 وذلك عند مقارنة المعادلتين 2.2 ، 2.6 تحقق الدالة اعلا التعريف الضمني للتوقع المشروط . وهذا يعني تحقق صحة تساوي المتغيرات العشوائية المستمرة المشتركة $E[Y \mid X]$ كما معرفة في المعادلة 2.6 مع الجهة اليمنى للمعادلة 2.2 وبنفس الطريقة نثبت اذا كان $\varphi(Y)$ عبارة عن

متغير عشوائي بمتوسط محدود وكان Y, X عبارة عن متغيرين عشوائيين مستمريـــن مشتركين فان (لجميع قيم x عندما $f_X(x) > 0$)

$$E[\varphi(Y) \mid X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, f_{Y|X}(y \mid x)\, dy. \tag{2.13}$$

<u>مثال</u> 2A

المتغيرات العشوائية الموزعة توزيعاً طبيعياً مشتركاً :

يقال ان المتغيرين العشوائيين X_2 ، X_1 الموزعين توزيعا مشتركا بانهما طبيعيان اذا كانت دالة خاصيتهما المشتركة معرفة كما يلي :

$$\varphi_{X_1,X_2}(u_1,u_2) = \exp[i(u_1m_1 + u_2m_2) - \tfrac{1}{2}(u_1^2\sigma_1^2 + u_2^2\sigma_2^2 + 2u_1u_2K_{12})], \tag{2.14}$$

لكل عددين حقيقيين u_2, u_1
حيث

$$\begin{aligned} &m_1 = E[X_1],\ m_2 = E[X_2],\\ &\sigma_1^2 = \mathrm{Var}[X_1],\ \sigma_2^2 = \mathrm{Var}[X_2],\\ &K_{12} = \mathrm{Cov}[X_1,X_2] = \sigma_1\sigma_2\rho, \end{aligned} \tag{2.15}$$

وان ρ عبارة عن معامل الارتباط بين X_1 ، X_2 اذا كان $|\rho| < 1$ فان للمتغيريـــن العشوائيين X_1 ، X_2 دالة كثافة احتمال مشتركة كما يلي :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \tag{2.16}$$
$$\times \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_2}\right)\left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}.$$

لكل من العددين الحقيقيين x_1, x_2
نثبت بعد اعادة ترتيب الاسس في المعادلة 2.16 ان :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)\frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\varphi\left(\frac{x_2-m_2-\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)\rho(x_1-m_1)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right), \tag{2.17}$$

حيث

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)y^2} \tag{2.18}$$

عبارة عن دالة الكثافة الطبيعية . من المعادلة 2.17 نحصل على

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sigma_1} \varphi\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1}\right), \tag{2.19}$$

$$f_{X_2 | X_1}(x_2 \mid x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \varphi\left(\frac{x_2 - m_2 - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)\rho(x_1 - m_1)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right). \tag{2.20}$$

نعبر عن المعادلة 2.20 كما يلي : اذا كان X_1 ، X_2 موزعان توزيعاً طبيعياً مشتركا فان قانون احتمال X_2 المشروط ، اذا كان X_1 معلوما ، عبارة عن قانون احتمال الطبيعي بمتوسط يساوي $m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - m_1)$ وبانحراف معياري يساوي $\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$.
نوضح ذلك بالرموز كما يلي :

$$E[X_2 \mid X_1 = x_1] = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1 - m_1), \tag{2.21}$$

$$E[(X_2 - E[X_2 \mid X_1])^2 \mid X_1 = x_1] = \sigma_2{}^2(1-\rho^2), \tag{2.22}$$

حيث تعرف كل من ρ ، $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ بالمعادلة 2.15 . اشتقاق المعادلتين 2.21 ، 2.22 كان وفقا للافتراض القائل بان $|\rho| < 1$ لكن بالرغم من ذلك نستطيع إثبات تحقيق صحة المعادلتين اذا كان $|\rho| = 1$

دالة الخاصية ، العزوم ، والتباين المشروط :

تظهر العديد من المتغيرات العشوائية كنتيجة لاختلاط عشوائي لمتغيرات عشوائية اخرى
تؤدي دراسة مثل هذه المتغيرات العشوائية ، ودراسة مفاهيم التباين المشروط ، العزوم الشرطية ، دالة خاصية الشرط دورا مهما جدا .

نرمز لتباين Y المشروط عندما يكون X معلوما بالرمز $\text{Var}[Y \mid X]$ ويعرف كما يلي

$$\text{Var}[Y \mid X] = E[(Y - E[Y \mid X])^2 \mid X], \tag{2.23}$$

بافتراض ان $E[Y^2] < \infty$ في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة والمشتركة فان

$$\mathrm{Var}[Y \mid X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - E[Y \mid X = x])^2 f_{Y \mid X}(y \mid x)\, dy. \quad (2.24)$$

توجد صيغة مهمة للتعبير عن التباين غير المشروط $\mathrm{Var}[Y]$ بدلالة التباين المشروط :
اذا كان $E[Y^2] < \infty$ فان :

$$\mathrm{Var}[Y] = E[\mathrm{Var}[Y \mid X]] + \mathrm{Var}[E[Y \mid X]]. \quad (2.25)$$

بعبارة اخرى ، يساوي التباين متوسط التباين المشروط زائد تباين المتوسط المشروط .
نبرهن المعادلة 2.25 بالاستفادة من الحقيقة الاساسية الاتية :
اذا كان $E[Y] < \infty$ فان

$$E[Y] = E[E[Y \mid X]]. \quad (2.26)$$

من اجل برهنة المعادلة (2.26) نفرض ان $g(X) = 1$ في المعادلة 2.6 من المعادلة 2.26 نحصل على

$$\mathrm{Var}[Y] = E[\,|\, Y - E[Y] \,|^2\,] = E[E[\,|\, Y - E[Y] \,|^2 \mid X]]. \quad (2.27)$$

ان لكل متغير عشوائي ولكل كمية ثابتة a, Z يكون

$$E[\,|\, Z - a \,|^2\,] = E[\,|\, Z - E[Z] \,|^2\,] + \{E[Z] - a\}^2. \quad (2.28)$$

بنفس طريقة برهنة المعادلة 2.28 نستطيع ان نثبت ان

$$E[\,|\, Y - E[Y] \,|^2 \mid X] = E[\,|\, Y - E[Y \mid X] \,|^2 \mid X] + \{E[Y \mid X] - E[Y]\}^2 \quad (2.29)$$

باتخاذ توقع لطرفي المعادلة 2.29 نحصل على المعادلة 2.25

<u>مثال</u> 2B

مجموع العدد العشوائي من المتغيرات العشوائية المستقلة :

نفرض N عبارة عن عدد انات نوع من الحشرات في منطقة معينة . نفرض ان X عبارة عن عدد البيوض الموضوعة من قبل حشرة واحدة ثم نفرض بعد ذلك ان Y عبارة

عن عدد البيوض في المنطقة . اوجد متوسط وتباين Y

نستطيع الان كتابة Y كما في الشكل ادناه :

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \qquad (2.30)$$

حيث X_i عبارة عن عدد البيوض العائدة للحشرة i نفترض انالمتغيرات العشوائية $X_1,$ $X_2, \ldots$ مستقلة بعضها عن البعض الاخربالاضافة الى كونها مستقلة عن المتغيرالعشوائي N

الذي يمثل عدد اناث الحشرات البيوضة . نفترض ايضا تماثل المتغيرات X_i كالمتغير العشوائي X بمتوسط وتباين محدودين .

قبل ان نجد تباين ومتوسط Y نجد اولا متوسط وتباين Y الشروطين اذا علمنا N . اذا علمت ان $N = n$ فان Y موزعةكمجموع n من المتغيرات العشوائية المستقلة ذات المتوسط والتباين المشتركين $E[X]$ ، $\mathrm{Var}[X]$ على الترتيب وهكذا فان

$$E[Y \mid N = n] = nE[X], \quad \mathrm{Var}[Y \mid N = n] = n\,\mathrm{Var}[X]. \qquad (2.31)$$

نكتب المعادلة 2.31 بعد ذلك بشكل اعم وكما يلي

$$E[Y \mid N] = N\,E[X], \quad \mathrm{Var}[Y \mid N] = N\,\mathrm{Var}[X]. \qquad (2.32)$$

من المعادلة 2.32 نحصل على

$$E[E[Y \mid N]] = E[N]E[X], \quad E[\mathrm{Var}[Y \mid N]] = E[N]\mathrm{Var}[X]. \qquad (2.33)$$

من المعادلات 2.26, 2.25, 2.33 نحصل على التعبيرين الاتيين للمتوسط ولتباين Y

$$E[Y] = E[N]E[X], \qquad (2.34)$$
$$\mathrm{Var}[Y] = E[N]\mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[N]E^2[X]. \qquad (2.35)$$

من المعروف التعبير عن عزوم وللعزوم المركزية للمتغير العشوائي Y ببساطة بدلالة دالة خاصية المتغير العشوائي .

$$\varphi_Y(u) = E[e^{iuY}]. \qquad (2.36)$$

نستطيع ان نحقق ان التعبير عن العزوم والعزوم المركزية الشرطية يكون بنفس الطريقة بدلالة دالة الخاصية الشرطية .

$$\varphi_{Y|X}(u \mid x) = E[e^{iuY} \mid X = x]. \qquad (2.37)$$

اما في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة المشتركة فان

$$\varphi_{Y|X}(u \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f_{Y|X}(y \mid x)\, dy. \qquad (2.38)$$

نحصل على دالة الخاصية غير المشروطة من معرفتنا لدالة الخاصية المشروطة وكما يلي :

$$\varphi_Y(u) = E[E[e^{iuY} \mid X]] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{Y|X}(u \mid x)\, dF_X(x). \qquad (2.39)$$

مثال 2C

توزيعات بواسون المركبة :

اثبت كرين وود ، ويول في سنة (1920) ان توزيع ذي الحدين السالب الفـــا توفيقاً لحوادث معامل المعدات الحربية في انكلترا من توزيع بواسون وذلك خلال الحرب العالمية الاولى .اثبتا ايضا ان هذه الظاهرة يمكن توضيحها وذلك من خلال افترض ان عدد الحوادث لكل عامل موزعة حسب توزيع بواسون بمتوسط يوضح صفة ذلك الفاعل ،ونستطيع ان نعتبر المتوسطات المختلفة للعمال بانها قيم للمتغير العشوائي λ .

بصورة ادق .نفرض ان X عبارة عن متغير عشوائي موزع حسب توزيع بواسون بمتوسط λ ان

$$E[e^{iuX}] = e^{\lambda(e^{iu}-1)} \qquad (2.40)$$

نفترض ان اختيار المتوسط λ يكون حسب التوزيع الاحتمالي $F(\lambda)$ مثلا اذا كان X عبارة عن عدد الحوادث لكل عامل في المعمل ، فان متوسط عدد حوادث العامل λ سيختلف من عامل الى اخر .يمكن ان نكتب(2.40) كما يلي (اذا اعتبرت λ بانها القيمة المشاهدة للمتغيه العشوائي Λ بدالةتوزيع $F(\lambda)$)

$$E[e^{iuX} \mid \Lambda = \lambda] = e^{\lambda(e^{iu}-1)}. \qquad (2.41)$$

داله خاصية X تكون كما يلي

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} E[e^{iuX} \mid \Lambda = \lambda]\, dF(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda(e^{iu}-1)}\, dF(\lambda) \qquad (2.42) \\ &= \varphi_\Lambda(\{e^{iu}-1\}/i),\end{aligned}$$

حيث $\varphi_\Lambda(\cdot)$ عبارة عن دالة خاصية Λ .

يمثل اسم توزيع بواسون المركب قانون احتمال بدالة خاصية في شكل المعادلة 2.42 والتي تظهر عند مشاهدة خليط من الحوادث العشوائية من نوع بواسون ، راجع كتابي

Feller (1943) Satterthwaite (1942).

سنعتبر حالة مهمة وهي عندما يفترض في Λ ان تخضع لتوزيع كاما ذي المعلمين r ، λ_0 نوضح ذلك بالرموز .

$$\varphi_\Lambda(u) = \left(1 - \frac{iu}{\lambda_0}\right)^{-r}. \qquad (2.43)$$

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \left(1 - \frac{\{e^{iu}-1\}}{\lambda_0}\right)^{-r} = \left(\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0 - e^{iu}}\right)^{r} \\ &= \left(\frac{p}{1-qe^{iu}}\right)^{r}, \qquad (2.44)\end{aligned}$$

حيث $p = \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}$, $q = 1-p$

بعبارة ثانية ان لـ X توزيع دلك الحدين السالب بالمعلمين r ، p نوضح متوسط وتباين X كما يلي .

$$E[X] = \frac{rq}{p} = \frac{r}{\lambda_0}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{rq}{p^2} = \frac{r(1+\lambda_0)}{\lambda_0^2}. \qquad (2.45)$$

نستطيع توسيع مفهوم التوقع الشرطي ليشمل عدة متغيرات عشوائية بصورة خاصة تأمل n في المتغيرات العشوائية $X_1, \cdots, X_n$ والمتغير العشوائي Y بمتوسط محدود يرمز له Y المشروط اذا كانت قيم $X_1, \cdots, X_n$ معلومة بالرمز $E[Y \mid X_1, \ldots, X_n]$ ويعرف بانه المتغير العشوائي الوحيد ذو متوسط محدود وهو عبارة عن دالة لـ $X_1, \cdots, X_n$ ويحقق

$$E[E[Y \mid X_1, \cdots, X_n]g(X_1, \cdots, X_n)] = E[Yg(X_1, \cdots, X_n)]. \quad (2.46)$$

لكل متغير عشوائي $g(X_1, \cdots, X_n)$ وهو عبارة عن دالة محدودة لـ $X_1, \cdots, X_n$

المكملات :

2A بنفس طريقة تعريف التباين المشروط نعرف العزوم المشروط بصورة خاصة تأمل العزوم المركزية الثالثة والرابعة .

يرمز للعزومين المركزيين الثالث والرابع للمتغير العشوائي Y بالرموز $\mu_4[Y], \mu_3[Y]$ على الترتيب

ويعرفان كما يلي :

$$\mu_3[Y] = E[(Y - E[Y])^3], \mu_4[Y] = E[(Y - E[Y])^4].$$

بنفس الطريقة نعرف

$$\mu_3[Y \mid X] = E[(Y - E[Y \mid X])^3 \mid X],$$
$$\mu_4[Y \mid X] = E[(Y - E[Y \mid X])^4 \mid X].$$

اثبت ان

$$\mu_3[Y] = E[\mu_3[Y \mid X]] + \mu_3[E[Y \mid X]],$$
$$\mu_4[Y] = E[\mu_4[Y \mid X]] + 6E[\text{Var}[Y \mid X]] \text{Var}[E[Y \mid X]] + \mu_4[E[Y \mid X]].$$

التمارين :

2.1 اثبت تحقيق صحة المعادلة 2.13

2.2 عملية الفروع المتسلسلة الفرعية ، التكاثر

Branching, cascade, or multiplicative process.

مجتمع متكون من افراد تلد مجتمعاً جديداً . نفترض ان احتمال اعطاء الفرد الواحد من المجتمع k فرداً جديداً يساوي p_k حيث $k = 0, 1, \cdots$ ان اعداد الافراد المتكونة من افراد المجتمع المختلفة عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة . يكون المجتمع الجديد الجيل الاول والذي سيكون بعد ذلك الجيل الثاني وهلم .

جرى . عندما $n = 0, 1, \cdots$ نفرض ان X_n عبارة عن حجم الجيـل النوني . لاحظ ان

$$X_{n+1} = \sum_{j=1}^{X_n} Z_j(n),$$

حيث $Z_j(n)$ عبارة عن عدد افراد الجيل $(n+1)$ الذين تكونوا من الفرد j في الجيل النوني .

نفترض ان لعدد اولاد فرد مامتوسط μ وتباين σ^2 محدودين

$$\mu = \sum_{m=0}^{\infty} mp_m < \infty, \sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (m-\mu)^2 p_m < \infty.$$

اثبت ان :

$$m_n = E[X_n \mid X_0 = 1] = \mu^n$$

$$\sigma_n^2 = \text{Var}[X_n \mid X_0 = 1] = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1} & \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & \mu = 1. \end{cases}$$

تلميح اثبت ان

$$m_{n+1} = \mu m_n, \ \sigma_{n+1}^2 = \mu \sigma_n^2 + \mu^{2n} \sigma^2.$$

2.3 يصطاد صياد معين عدداً عشوائياً متغيراً من الحيوانات N بمتوسط m وتباين σ^2 يهتم الصياد في عدد الثعالب الذهبية التي يصطادها . افرض ان Y تمثل عدد الثعالب الفضية المصطادة اوجد متوسط وتباين Y وفقا للافتراضات الآتية أن حادثة اصطياد ثعلب فضي تكون باحتمال p وان هذه الحادثة مستقلة عن نوع الحيوان المصطاد وعن عدد الحيوانات المصطادة N .

2.4 عدد الاصابات التي تحدث في معمل ما في الاسبوع عبارة عن متغير عشوائي بمتوسط μ وتباين σ^2 . ان عدد الافراد الذين يصابون بحادثة واحدة موزع بصورة مستقلة كل منهما بمتوسط ν

وتباين τ^2
اوجد متوسط وتباين عدد الافراد الذين يصابون بحادثة ما خلال الأسبوع .

2.5 نفرض ان X_1 ، X_2 عبارة عن متغيرين عشوائيين موزعين بصورة مشتركة حسب التوزيع الطبيعي يمثلان سعات فولتية الضوضاء المسجلة في نهايتي فترة معروفة) .

نفترض ان دالة كثافة احتمالهما المشتركة ممثلة بالمعادلة 2.16 حيث $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 4$, $\rho = 0.4$. $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, اوجد $P[X_2 > 1 \mid X_1 = 1]$.

2.6 نفرض ان X_1 ، X_2 عبارة عن متغيرين عشوائيين موزعين بصورة مشتركة حسب التوزيع الطبيعي يمثلان المبيعات اليومية (مقاسة بالاف الوحدات) لبضاعة معينة في مخزن معين ليومين متتاليين. نفترض ان دالة كثافة احتمالها المشتركة ممثلة بالمعادلة 2.16

حيث $m_1 = m_2 = 3$, $\sigma_1 = \sigma_2 =$, $\rho = 0.8$

اوجد K بحيث تكون

(i) $P[X_2 > K] = 0.05,$

(ii) $P[X_2 > K \mid X_1 = 2] = 0.05.$

افترض ان قرار ادارة المخزن الاحتفاظ بعدد من الوحدات يكفي لتلبية) جميع الطلبات الواردة في يوم معين باحتمال 0.95 . ماذا يجب ان يكون حجم المخزين في صباح يوم معين اذا علمت ان

(iii) مبيعات يوم امس 2,000 وحدة (iv) مبيعات يوم امس غير معروفة ؟

2.7 نفترض أن X طبيعي بمتوسط يساوي صفراً وتباين يساوي 1 وان التوزيع المشروط لـ y عندما يكون $X = x$ طبيعي بمتوسط يساوي x وتباين يساوي $1 - \rho^2$.
اوجد توزيع X المشروط عندما يكون Y معلوماً .

2.8 نفترض أن μ طبيعي بمتوسط m وتباين τ^2 وان توزيع X المشروط اذا كان $\mu = \mu_0$ عبارة عن توزيع طبيعي بمتوسط μ_0 وتباين σ^2 (حيث σ^2 عبارة عن كمية ثابتة).

اثبت أن (i) توزيع X غير المشروط طبيعي بمتوسط m وتباين $\sigma^2 + \tau^2$, (ii) توزيع μ المشروط ، اذا كان $X = x$ طبيعياً بمتوسط وتباين يحققان

$$E[\mu \mid X = x] = \frac{x\tau^2 + m\sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2},$$

$$\mathrm{Var}[\mu \mid X = x] = \frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2}.$$

اوجد في التمارين 2.9 الى 2.12 مايلي :

(i) دالة كثافة احتمال X المشروطة اذا كان Y معلوماً (ii) $E[Y \mid X]$ مع الافتراض أن دالة كثافة احتمال X ، Y المشتركة مبينة ادناه

2.9
$$f_{X,Y}(x,y) = 6xy(2-x-y) \quad \text{if} \quad 0 \le x, y \le 1,$$
$$= 0,$$
ماعدا ذلك

2.10
$$f_{X,Y}(x,y) = 4y(x-y)e^{-(x+y)} \quad \text{if} \quad 0 \le x < \infty, 0 \le y \le x,$$
$$= 0,$$
ماعدا ذلك

2.11
$$f_{X,Y}(x,y) = \tfrac{1}{8}(y^2-x^2)e^{-y} \quad \text{if} \quad 0 \le y < \infty, |x| \le y,$$
$$= 0,$$
ماعدا ذلك

2.12
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} e^{-(x^2+xy+y^2)} \quad -\infty < x, y < \infty.$$

ماعدا ذلك .

2.13 التوزيعات الاسية المركبة :تأمل انحلال الجزيئات في مدخنة معينة (اوماشابه ذلك . مثل عطب المعدات او وقوع الحوادث) . نفترض ان الزمن X الـذي تستغرقه الجزيئة لكي يتم انحلالها عبارة عن متغير عشوائي يتبع قانون الاحتمال الاسي بالمعلم y لايفترض في قيمة y ان تكون متساوية لجميع الجزيئات . بل ان الجزيئات تكون عائدة لانواع مختلفة (او اجهزة مختلفة الانواع او افـــراد باصابات مختلفة) . بصورة اكثر تحديداً . y عبارة عن قيمة خاصة لمتغيـــر عشوائي بـ Y يتبع قانون احتمال كاما عندما يكون اختيار الجزيئة عشوائياً مـــن المدخنة وان دالة كثافة احتمال

$$f_Y(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1}e^{-\beta y}, \qquad \text{for} \quad y > 0, \tag{2.47}$$

حيث α β عبارة عن كميتين موجبتين ثابتتين تصفان شروط التجربة التي تتـم مشاهدتها . سبق وان افترضنا بان X عبارة عن المدة الزمنية التي تستغرقها الجزيئة لكي يتم انحلالهاوان X يخضع لقانون الاحتمال الاسي . نعبر الان عن ذلك الافتراض كما يلي : ان قانون احتمال X المشروط اذا علمنا Y يكون كما يلي :

$$f_{X|Y}(x \mid y) = ye^{-xy}$$

المطلوب ايجاد قانون الاحتمال المنفرد لزمن الانحلال X (للجزيئة التي تـــم اختيارها عشوائيا) .

2.14 وجد مصنع معين ان كمية مبيعاته X تكون حسب توزيع كاما بدالـــة كثافـــة

$$f_X(x \mid \mu) = \frac{4}{\mu^2} x e^{-2x/\mu}, \; x > 0$$

وان $E[X] = \mu$ عبارة عن متغير عشوائي ومقلوبه $1/\mu$

يتبع قانون احتمال كاما بدالة كثافة احتمال مبينة في المعادلة 2.47 اوجد دالة كثافة احتمال X .

2.15 عينة عشوائية لمتغير عشوائي X ذات حجم يساوي 8 وان هذه العينة عبارة عن قيم مشاهدة للمتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \cdots, X_8$ المستقلة والمتماثلـــة التوزيع كالمتغير X .

نفرض ان X ا قانون احتمال مستمر . ماهو احتمال كون كل من المشاهدات الثلاثة الأخيرة (X_6, X_7, X_8) اكبر من جميع المشاهدات الخمس الاولية . بصورة ادق اوجد

$$P[\min(X_6, X_7, X_8) > \max(X_1, \cdots, X_5)].$$

اثبت استقلالية هذا الاحتمال عن دالة كثافة أحتمال المتغيرات العشوائية المشاهدة .

تلميح : نفرض $V = \max(X_1, \cdots, X_5) \quad , \quad U = \min(X_6, X_7, X_8)$
اثبت ان

$$\begin{aligned}
P[U > V] &= \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - F_U(v)\} f_V(v)\, dv \\
&= 5 \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - F_X(v)\}^3 \{F_X(v)\}^4 f_X(v)\, dv \\
&= 5 \int_0^1 (1-y)^3 y^4\, dy.
\end{aligned}$$

استخرج قيمة التكامل اعلاه باستخدام دالة بيتا عندما $m > -1$ $n > -1$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{aligned}
B(m+1, n+1) &= \int_0^1 y^m (1-y)^n \, dy \\
&= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}
\end{aligned}$$

تعرف دالة كاما عندما $n > -1$ كما يلي

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \\
&= n! \qquad \text{if} \quad n = 0, 1, 2, \cdots.
\end{aligned}$$

نفرض ان $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+m}$ عبارة عن متغيـــرات عشوائية مستمرة متماثلة التوزيع مستقلة . نفرض ان $V = \max(X_1, \cdots, X_n)$ اوجد

(i) $P[X_{n+1} \geq V]$,

(ii) $P[\min(X_{n+1}, \cdots, X_{n+m}) \geq V]$.

نفرض ان $T_1, \cdots, T_n$ عبارة عن متغيرات عشوائية موزعة حسب التوزيع الاســـي المستقل بمتوسطات تساوي $1/\lambda_1, \cdots, 1/\lambda_n$ على الترتيب . اثبت عندما $j = 1, \cdots, n$ ان

$$P[T_j = \min(T_1, \cdots, T_n)] = \lambda_j/(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

2-3 خواص التوقعات الشرطية :

تبين في هذا البند ان التوقع الشرطي $E[Y \mid X]$ يعرف بانه الدالة الوحيدة لـ X التي تحقق المعادلة 2.6 ولها نفس خواص توقع المتغير العشوائي .

نظرية 3A

خواص التوقع الشرطي :

نفرض ان X متغيرعشوائي c عدد حقيقي U, V, Y ، $\varphi(X)$ متغيـرات عشوائية ذات متوسطات محدودة . فان

(3.0) $E[Y \mid X]$ قيمة وحيدة

(3.1) $E[Y \mid X] = E[Y]$ اذا كان X ، Y مستقلين

(3.2) $E[c \mid X] = c$,

(3.3) $E[\varphi(X) \mid X] = \varphi(X)$,

(3.4) $E[cY \mid X] = cE[Y \mid X]$,

(3.5) $E[\varphi(X)Y \mid X] = \varphi(X)E[Y \mid X]$,

(3.6) $E[U + V \mid X] = E[U \mid X] + E[V \mid X]$,

(3.7) $0 \leq Y$ تعني $0 \leq E[Y \mid X]$,

(3.8) $U \leq Y \leq V$ تعني $E[U \mid X] \leq E[Y \mid X] \leq E[V \mid X]$,

(3.9) $|E[Y \mid X]|^r \leq \{E[(|Y|) \mid X]\}^r \leq E[|Y|^r \mid X]$ for $r \geq 1$.

ملاحظة :

تتحقق صحة الصيغ 3.0 الى 3.9 باحتمال واحد سنهمل التمييز في هذا الكتاب بين العبارتين : الاولى تتحقق بدون مؤهلات والثانية تتحقق ماعدا مجموعة من الحالات التي لها احتمال وقوع يساوي صفراً .

البرهان :

لبرهنة المعادلة 3.0 يجب ان نبرهن وجود دالة واحدة على الاقل لـ X تحقق المعادلة 2.6 . نفرض الدالتين $h_1(X)$ و $h_2(X)$ بحيث ان

$$E[g(X)Y] = E[g(X)h_1(X)] \tag{3.10}$$
$$E[g(X)Y] = E[g(X)h_2(X)]$$

لـكل متغير عشوائي $g(X)$ وجود دالة محدودة لـ X

نفرض

$$A_1 = \{x: h_1(x) - h_2(x) > 0\}, \quad A_2 = \{x: h_1(x) - h_2(x) < 0\}.$$

لكي نبرهن

$$P[h_1(X) \neq h_2(X)] = P[X \epsilon A_1] + P[X \epsilon A_2] = 0. \tag{3.11}$$

في المعادلة 3.10 يتبين ان للمتغير العشوائي المناسب $g(X)$

$$E[g(X)\{h_1(X) - h_2(X)\}] = 0. \tag{3.12}$$

ينتمي الى صف المتغيرات العشوائية فاذا كان $g(X) = h_1(X) - h_2(X)$ والتي تحقق المعادلة 3.12 .

$$E[\,|\,h_1(X) - h_2(X)\,|^2] = 0, \tag{3.13}$$
$$P[\,|\,h_1(X) - h_2(X)\,| = 0] = 1,$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة .

في حالة عدم افتراض تحقيق المعادلة 3.12

$$g(X) = h_1(X) - h_2(X)$$

نتبع ما يلي :

الدالتان $I_{A_1}(X)$ ، $I_{A_2}(X)$ محدودة

∴ فان للدالتين قيم مقبولة للدالة $g(X)$ في المعادلة 3.12

$$E[I_{A_1}(X)\{h_1(X) - h_2(X)\}] = 0, \qquad (3.14)$$
$$E[I_{A_2}(X)\{h_1(X) - h_2(X)\}] = 0.$$

وبما ان

$$I_{A_1}(X)\{h_1(X) - h_2(X)\} \quad \text{and} \quad I_{A_2}(X)\{h_2(X) - h_1(X)\}$$

وهما دالتان غير سالبتين

∴ من المعادلة 3.14 نستنتج ان

$$0 = P[I_{A_1}(X)\{h_1(X) - h_2(X)\} \neq 0] \geq P[X \in A_1], \qquad (3.15)$$
$$0 = P[I_{A_2}(X)\{h_1(X) - h_2(X)\} \neq 0] \geq P[X \in A_2].$$

من المعادلة 3.15 نستنتج المعادلة 3.11 وهو المطلوب اثباته

برهان المعادلة 3.1

∴ المتغيران X , Y متغيرات غير معتمدة

$$E[Yg(X)] = E[Y]E[g(X)] = E[E[Y]g(X)]$$

∴ $E[Y]$ يحقق خاصية التعريف . المعادلة 2.6 من المتوقع المشروط

اذا كان X ، y متغيرين غير معتمدين وبنفس الطريقة نستطيع ان نبرهن صحة المعادلة 3.2 حيث انه من الواضح تحقيق صحة المعادلة 2.6 اذا افترضنا

$$Y = c \;,\; E[Y \mid X] = c$$

برهان المعادلة 3.5 والتي تتضمن المعادلتين 3.3 ، 3.4 من الواضح ان

$$E[\{\varphi(X)E[Y \mid X]\}g(X)] = E[E[Y \mid X]\{\varphi(X)g(X)\}] = E[Y\{\varphi(X)g(X)\}]$$
$$= E[\{Y\varphi(X)\}g(X)].$$

في ضوء خاصية التعريف ، المعادلة 2.6 من التوقع المشروط برهان المعادلة 3.5 قد تم

نبرهن المعادلة 3.6 بنفس الطريقة السابقة

$$E[\{E[U \mid X] + E[V \mid X]\}g(X)] = E[E[U \mid X]g(X)] + E[E[V \mid X]g(X)]$$
$$= E[Ug(X)] + E[Vg(X)]$$
$$= E[\{U + V\}g(X)].$$

برهان المعادلة 3.7

اذا كانت $Y \geq 0$ اذن لاي دالة غير سالبة ($g(X)$) يكون

$$0 \leq E[g(X)Y] = E[g(X)E[Y \mid X]]. \qquad (3.16)$$

نفرض ان المجموعة A للقيم x والتي تحقق $E[Y \mid X = x] < 0$ تمتلك ، احتمالاً موجباً .

نفرض $g(x) = 1$ او صفراً بالاعتماد على x اذا كانت تنتمي لـ A او ، لاتنتمي A. .

$\therefore$ $g(X)E[Y \mid X = x]$ غير موجبة بالحقيقة سالبة لمجموعة من الاحتمالات السالبة .

وعلى هذا الاساس فان $E[g(X)E[Y \mid X]] < 0$ وهذا يتناقض مع المعادلة 3.16 وهذا برهان 3.7 ومن ذلك فان برهان المعادلة 3.8 قد تم نبرهن المعادلة 3.9 من المعادلة 3.8 بحيث ان $V = |Y|, U = -|Y|$

$$|E[Y \mid X]| \leq E[(|Y|) \mid X]. \qquad (3.17)$$

وبناء على ذلك تم برهان المتباينة الاولى لكي نبرهن المتباينة الثانية : اذا كان Z متغيراً عشوائياً غير سالب واذا كان $r \geq 1$ فان

$$\{E[Z \mid X]\}^r \leq E[Z^r \mid X]. \qquad (3.18)$$

نبرهن المعادلة (3.18) باستخدام نظرية بتلي (مقارنة الاحتمالات الحديثة ص 434)

$$z^r - z_0^r \geq (z - z_0) r z_0^{r-1}$$

عندما تكون $r \geq 1$ و z ، z_0 اعداداً غير سالبة .

$$Z^r - \{E[Z \mid X]\}^r \geq (Z - E[Z \mid X]) r \{E[Z \mid X]\}^{r-1}. \tag{3.19}$$

باستخدام المعادلات 3.3 ، 3.5 ، 3.6 بايجاد التوقع الشرطي لطرفي المعادلة 3.19 عندمايكون X معلوماًنحصل على

$$E[Z^r \mid X] - \{E[Z \mid X]\}^r \geq r\{E[Z \mid X]\}^{r-1} E[(Z - E[Z \mid X]) \mid X] = 0$$

وبهذا نحصل على المعادلة 3.18 . وهو المطلوب اثباته

التمارين :

3.1 نفرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية لها تزايد مستقل ودالة قيمة وسطية محدودة $m(t) = E[X(t)]$
اثبت لاي نقطة زمنية $0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ ان

$$E[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \cdots, X(t_n)] = X(t_n) + m(t_{n+1}) - m(t_n).$$

3.2 نظام المراهنات : يقال ان العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ ذات المتوسطات المحدودة بانها نظام للمراهنات (ذات المعلم المستمر) اذا كان لاي مجموعة زمنية $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$,

$$E[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \cdots, X(t_n)] = X(t_n);$$

بعبارة اخرى ، توقع $X(t_{n+1})$ الشرطي اذا علمت لقيم $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ يساوي قيمة $X(t_n)$ المشاهدة حديثاً . اثبت ان عملية وينر عبارة عن نظام ، للمراهنات . (للحصول على معلومات كاملة حول نظرية المراهنات راجع Doob ([1953]) .

3.3 نظام المراهنات (المتقطع المعلم . يقال ان العملية التصادفية $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ ذات المتوسطات المحدودة عبارة عن نظام للمراهنات (المتقطعة المعلم) اذا كان لكل عدد صحيح n

$$E[X_{n+1} \mid X_1, \cdots, X_n] = X_n$$

(i) اثبت ان التتابع $\{S_n\}$ لمجموع المتغيرات العشوائية المستقلة المتتالي عبارة عن نظام للمراهنات حيث ان متوسط المتغيرات العشوائية يساوي صفراً .

(ii) اذا كانت $\{X_n\}$ عبارة عن نظام للمراهنات اثبت لاي عدد صحيح

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_n < m_{n+1},$$

ان

$$E[X_{m_{n+1}} \mid X_{m_1}, \cdots, X_{m_n}] = X_{m_n}.$$

الفصل الثالث

العمليات الطبيعية وعمليات التغاير الثابت

Normal processes and covariance stationary processes

احدى الاساليب المستخدمة في تطوير مشاكل النماذج الرياضية للظواهر الاعتبارية حسب القوانين الاحتمالية هو وصف تلك الظواهر بدلالة طبيعة عزومها الاولى والثانية . لهذا الاسلوب تطبيقات مهمة في نظرية السيطرة والاتصالات الاحصائية وفي تحليل السلاسل الزمنية .

نناقش في هذا الفصل بعضا من المفاهيم والاساليب الاساسية لنظرية العمليات التصادفية التي تمتلك عزوماً ثابتة محدودة . يوجد نوعان من هذه العمليات لهما تطبيقات مهمة وهما : العمليات الطبيعية وعمليات التغاير الثابت نلاحظ هذه الاهمية في البنود القادمة .

3-1 دالة القيمة الوسطية وقوة التغاير للعملية التصادفية

THE MEAN VALUE FUNCTION AND THE COVARIANCE KERNEL OF A STOCHASTIC PROCESS

بصورة عامة لانستطيع ايجاد قانون احتمال المتغير العشوائي من خلال معرفة التباين والمتوسط لذلك المتغير العشوائي مالم نعرف شكل دالة قانونه الاحتمالي الى حد عدة معالم غير معينة والتي تكون ببساطة ذات علاقة بالمتوسط والتباين . مثلا اذا كان X عبارة عن متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي فان معرفة متوسطه وتباينه يؤدي الى معرفة جميع الاحتمالات المتعلقة بالمتغير X .

لكن اذا كان X يخضع لتوزيع بواسون فان قانونه الاحتمالي يتحدد من معرفة متوسط ذلك المتغير .

بصورة عامة عندما يكون شكل دالة قانون احتمال المتغير العشوائي غير معروف فان معرفة متوسط وتباين المتغير العشوائي يؤدي دورا جزئيا في تلخيص قانون الاحتمال لذلك المتغير لانه باستخدام مختلف المتباينات مثل متباينة جيفيجف Chebyshev's نستطيع تكوين تقدير تقريبي لمختلف خصائص قانون الاحتمال .

يؤدي متوسط وتباين متغير عشوائي مفرد دورا اساسيا بينما يؤدي دالة القيمة الوسطية وقوة التغاير ذلك الدور في حالة العملية التصادفية .

نفرض ان $\{X(t), t \in T\}$ عبارة عن عملية تصادفية ذات عزوم ثابتة محدودة . نرمز لدالة القيمة الوسطية لتلك العملية بالرمز $m(t)$ وتعرف لجميع قيم t العائدة الى T كما يلي

$$m(t) = E[X(t)], \tag{1.1}$$

حيث يمثل الرمز E التوقع ونرمز لقوة التغاير بالرمز $K(s,t)$ ويعرف لجميع قيم s ، t العائدة الى T كما يلي

$$K(s,t) = \operatorname{Cov}[X(s), X(t)]. \tag{1.2}$$

حيث يمثل الرمز cov التغاير

مثال : 1A

تظهر الكثير من العمليات التصادفية كدوال لعدد محدود من المتغيرات العشوائية . مثلا : نفترض ان $X(t)$ تمثل موقع الجزيئة المتحركة بسرعة ثابتة يمكننا افتراض ان $X(t)$ تكون في الشكل

$$X(t) = X_0 + Vt, \tag{1.3}$$

حيث X_0 ، V عبارة عن متغيرين عشوائيين ، يمثلان الموقع الابتدائي وسرعة الجزيئة على الترتيب . تعطى دالة القيمة الوسطية وفق تغاير العملية $\{X(t), t \geq 0\}$ كما يلي :

$$\begin{aligned} m(t) &= E[X(t)] = E[X_0] + tE[V], \\ K(s,t) &= \operatorname{Cov}[X(s), X(t)] = \operatorname{Var}[X_0] + (s+t)\operatorname{Cov}[X_0,V] + st\operatorname{Var}[V]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

اذن يتبين لنا ان للحصول على دالة القيمة الوسطية وقوة تغاير $\{X(t), t \geq 0\}$

لانحتاج الى معرفة قانون احتمال V, X_0 المشترك لكننا نحتاج الى معرفة متوسطهما ، تباينهما وتغايرهما .

مثال 1B

دالة القيمة الوسطية وقوة تغاير عمليتي وينر وبواسون :

نفرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية وينر ذات معلم σ^2 من المعادلتين 3.3 ، 3.4 في الفصل الاول ولجميع قيم $t \geq 0$ نحصل على

$$m(t) = E[X(t)] = 0,$$
$$\mathrm{Var}[X(t)] = \sigma^2 t. \tag{1.5}$$

نحسب بعد ذلك قوة التغاير $K(s,t)$ عندما $s < t$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X(s), X(t)] &= \mathrm{Cov}[X(s), X(t) - X(s) + X(s)] \\ &= \mathrm{Cov}[X(s), X(t) - X(s)] + \mathrm{Cov}[X(s), X(s)] \\ &= \mathrm{Var}[X(s)] = \sigma^2 s,\end{aligned} \tag{1.6}$$

تغاير $X(s)$ ، $X(t) - X(s)$ يساوي صفراً لانهما مستقلتان . نحصل على قوة تغاير عملية وينر ذات المعلم σ^2 كما يلي :

$$K(s,t) = \sigma^2 \min(s,t) \quad \text{لجميع قيم } s, t \geq 0 \quad \text{حيث } \min \tag{1.7}$$

min تعني اصغر القيمتين

بنفس الطريقة نجد دالة القيمة الوسطية وقوة التغاير اذا كانت $\{N(t), t \geq 0\}$ عملية بواسون بكثافة تساوي ν :

$$m(t) = E[N(t)] = \nu t, \tag{1.8}$$

$$K(s,t) = \mathrm{Cov}[N(s), N(t)] = \nu \min(s,t). \tag{1.9}$$

في الحقيقة من المعادلة (1.6) يتضح ان لكل عملية تصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ ذات تزايد مستقل يكون :

$$\mathrm{Cov}[X(s), X(t)] = \mathrm{Var}[X(\min \{s,t\})]. \tag{1.10}$$

تأتي اهمية دالة القيمة الوسطية وقوة التغاير من الحقيقتين الآتيتين :

(i) ايجاد دالة القيمة الوسطية وقوة تغايراية عملية تصادفية يكون اسهل بكثير من ايجاد قانونها الاحتمالي الكامل .

(ii) يمكن الاجابة على كثير من الاسئلة التي تخص العملية التصادفية اذا عرفنا دالة قيمتها الوسطية وقوة تغايرها .

سنوضح في البند 3–3 كيفية استخدام دالة القيمة الوسطية وقوة التغاير لدراسة طبيعة اوساط العينة لعملية تصادفية . وتفاضل وتكامل العمليات التصادفية .

مثال 1C

العمليات المتزايدة بعملية بواسون

The increment process of a Poisson process

نفرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون بكثافة تساوي ν وافرض ان L عبارة عن كمية ثابتة موجبة . نستطيع تعريف عملية جديدة $\{X(t), t \geq 0\}$ كما يلي :

$$X(t) = N(t + L) - N(t). \tag{1.11}$$

مثلا ، اذا كانت $N(t)$ تمثل عدد الحوادث من نوع معين الواقعة في الفترة من صفر الى t فان $X(t)$ تمثل عدد الحوادث الواقعة في فترة طولها L وبدايتها عند النقطة t

بينما في الاساس نستطيع تحديد قانون احتمال $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ المشترك لاية نقطة من النقاط الزمنية $t_1, \cdots, t_n, n$ ومن الطبيعي ان نبدأ دراستنا للعملية التصادفية من خلال حساب دالة قيمتها الوسطية وقوة تغايرها .

ان دالة القيمة الوسطية للعملية $\{X(t), t \geq 0\}$ المعرفة في المعادلة 1.11 تكون كما يلي :

$$m(t) = E[X(t)] = E[N(t + L) - N(t)] = \nu L. \tag{1.12}$$

نحسب بعد ذلك قوة التغاير $K(s,t) = \mathrm{Cov}[X(s), X(t)]$ قد تفترض ان $s \le t$ نميز بعد ذلك الحالتين : (i) $t \le s + L$
(ii) $t > s + L$. في الحالة (ii) $X(t)$, $X(s)$ متغيران عشوائيـــان مستقلان وبهذا سيكون تغايرهما يساوي صفرا . في الحالة (i) نكتب مايلي :

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \mathrm{Cov}[N(s+L) - N(s), N(t+L) - N(t)] \\ &= \mathrm{Cov}[N(s+L) - N(t) + N(t) - N(s), N(t+L) - N(t)] \\ &= \mathrm{Cov}[N(s+L) - N(t), N(t+L) - N(t)], \end{aligned} \tag{1.13}$$

لان تغاير $N(t) - N(s)$ ، $N(t+L) - N(t)$ يساوي صفراً .

نستنتج من المعادلة 1.13 بعد كتابة $N(t+L) - N(t) = N(t+L) - N$ $(s+L) + N(s+L) - N(t)$ ان

$$K(s,t) = \mathrm{Var}[N(s+L) - N(t)] = \nu\{s + L - t\} = \nu\{L - (t - s)\}. \tag{1.14}$$

وهكذا سنحصل على قوة تغاير العملية $\{X(t), t \ge 0\}$ المعرفة بالمعادلة 1.11 كما يلي :
(جميع قيم $s, t \ge 0$)

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \nu\{L - |t - s|\} && \text{if } |t - s| \le L, \\ &= 0 && \text{if } |t - s| > L. \end{aligned} \tag{1.15}$$

3-2 العمليات المتطورة والعمليات الثابتة :

من المناسب تقسيم العمليات التصادفية بالمعنى العام الى صنفين : هما الصنف الثابت والصنف المتطور . العملية الثانية عبارة عن عملية يبقى لها نفس التوزيع مع مرور الزمن لان النظام الميكانيكي الذي ينتج هذه العملية لايتغير مع تغير الزمن .

اما العملية المتطورة فهي غير العملية الثانية .
عملية بواسون $\{N(t), t \ge 0\}$ عملية متطورة لأن توزيع $N(t)$ يعتمد على الزمن .
من جانب آخر تظهر العملية $\{X(t), t \ge 0\}$ المعرفة في المعادلة 1.11

وكأنها ثابتة . لأن توزيع عدد الحوادث الواقعة في فترة زمنية ذات طول ثابت يساوي لاتعتمد على الزمن t الذي تبدأ فيه الفترة للحصول على تعريف اساسي لعملية الثبوت نقوم بتقديم مفهوم مجموعة الدليل الخطية .

يقال ان مجموع الدليل L عبارة عن مجموعة دليل خطية اذا كان لها الخاصية الاتية : ينتمي مجموع $t+h$ الى T لاي عنصرين h ، t عائدين الى T

امثلة على مجموعة الدليل اعلاه هي $T = \{1, 2, \cdots\}$, $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$,
$T = \{t: -\infty < t < \infty\}$. $T = \{t: t \geq 0\}$

يقال ان العملية التصادفية $\{X(t), t \in T\}$ ذات مجموعة الدليل T الخطي

(i) ثابتة تماما برتبة *strictly stationary of order k,* حيث k عدد صحيح موجب معلوم اذا كان المتجهان العشوائيان ذوا البعد k

$$(X(t_1), \cdots, X(t_k)) \quad \text{and} \quad (X(t_1+h), \cdots, X(t_k+h))$$

متماثلين بالتوزيع لاية نقطة $t_1, \cdots, t_k$ عائدة الى T ولاي h ينتمي الى T

(ii) ثابتةتماما اذا كانت العملية ثابتة تماما برتبة k لكل عدد صحيح k
لكي نبرهن ان العملية التصادفية ثابتة تماماً نحتاج الى تحقيق صحة عدد كبير من الشروط مثلاً تأمل العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ المعرفة بالمعادلة 1.11 بسهولة نستطيع تحقيقها بانها ثابتة تماما برتبة 1 اذا بذلنا جهداً اكثر نستطيع تحقيقها اذا كانت الرتبة 2 في الحقيقة نستطيع ان نثبت ان العملية عبارة عن عملية ثابتة تماما . لاتناقش في هذا الكتاب نظرية العمليات الثابتة تماما لانها تتطلب رياضيات معقدة .

يوجد مفهوم آخر للثبوت وهو مايسمى بالثبوت التغايري ، حيث تكون النظرية الخاصة به اسهل برهانا ونفيد ان كثيراً من التطبيقات العملية يقال عنها عملية تصادفية $\{X(t), t \in T\}$ ثابتة تغايرية *covariance stationary* اذا كان لها عزوم ثانية محدودة v اذا كانت مجموعة دليلها خطية واذا كان قوة تغايرها $K(s,t)$ عبارة عن دالة للفرق المطلق $|s-t|$ فقط ، بمعنى وجود دالة $R(v)$، بحيث يكون

$$K(s,t) = R(s-t); \tag{2.1}$$

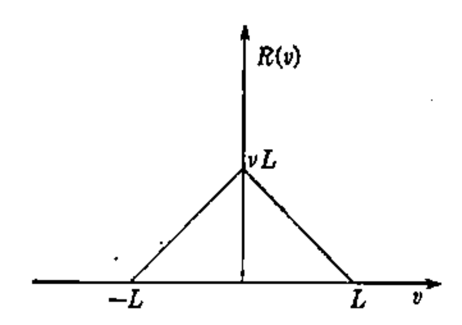
لجميع قيم s ، t العائدة الى T
او بعبارة ادق ، $R(v)$ لها خاصية ان لكل V, t. متمية الى T ،

$$\text{Cov}[X(t), X(t+v)] = R(v). \tag{2.2}$$

يعني المصطلح الثابت التغايري في هذا الكتاب بالثابت الضعيف او الثابت بالمعنى العام او الثابت برتبة كما مستخدمة من قبل بعض الكتاب مثل Doob [1953], 95 , Loève [1960], 482 ،
نطلق على $R(v)$ دالة تغاير السلسلة الزمنية $\{X(t), t \in T\}$ الثابتة التغاير .

في ضوء المعادلة $\{X(t), t \geq 0\}$ تعتبر العملية التصادفية في المثال 1C ثابتة التغاير بدالة تغاير (راجع الشكل 3.1)

$$\begin{aligned} R(v) &= \nu \{L - |v|\} \qquad \text{if } |v| \leq L, \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{if } |v| > L. \end{aligned} \tag{2.3}$$



الشكل 3.1 مخطط دالة التغاير R(v) المبينة في المعادلة 2.3

يجب ان نلاحظ اذا كانت العملية التصادفية ذات العزوم الثانية المحدودة ثابتة . تغايرية فانه ليس بالضرورة ان تكون دالة قيمتها الوسطية كمية ثابتة . اذا كانت $\{X(t), t > 0\}$ عبارة عن العملية التصادفية المعتبرة في المثال 1C فان العملية التصادفية

$$Y(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + X(t) \tag{2.4}$$

ثابتة تغايرية حتى ولو كانت حالة قيمتها الوسطية .

$$E[Y(t)] = \nu L + \cos\left(\frac{2\pi}{L}t\right) \tag{2.5}$$

تعتمد على t .

معنى الثبوتية واستخداماتها :

نوضح الافتراضات المتعلقة بكون العملية التصادفية ثابتة تماماً بالاقتباس الآتي من Scott ، (1959) :

الكون الذي نراه عبارة عن حقيقة مفردة لعملية تصادفية ذات اربعة ابعاد (ثلاثة محاور فضائية والمحور الرابع زمني) أن التعبير الافتراضي الغامض القائل بان توزيع المادة وحركتها في منطقة فضائية واسعة هو عبارة عن حقيقة لها نفس التوزيع .

يماثل الافتراض الدقيق لكون العملية التصادفية في السؤال ثابتة في ثلاثة محاور فضائية .

عملياً ، يعبر عن نفس افتراض الثبوتية بالصيغة القائلة بان لكل منطقة فضائية يوجد نظام صدفة خاص متشابه في جميع المناطق ويتحكم في توزيع وحركة المادة .

يجب ان نلاحظ ان العملية التصادفية تكون ثابتة وهذا لايعني ان لدالة عينة مثالية للعملية نفس الظهور في جميع النقاط الزمنية . نفترض حدوث انفجار في غابة نائية من العالم خلال مجرى التاريخ . نفرض ان $X(t)$ عبارة عن كثافة الصوت في الزمن t في الغابة .

ان $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ عبارة عن عملية ثابتة تماماً اذا تم اختيار وقت حدوث الانفجار منتظماً في الخط الحقيقي .

تأتي اهمية مفهوم العملية التصادفية الثانية من حقيقة برهان النظرية الارجودكية *ergodic theorem* الاولى في حالة العمليات الثابتة ومن حقيقة التعريف الاولى للطيف *spectrum* حيث عرف في البداية العملية التصادفية الثابتة . نناقش في هذا البند معنى النظرية الارجودكية نناقش الطيف في البند 6-3 بما ان تعريف هذه المفاهيم كان سهلاً في حالة العمليات التصادفية الثابتة فانه بالامكان جعل هذه المفاهيم تشمل العمليات غير الثابتة والتي تتكون بصورة علمية من القسم الثابت والقسم الانتقالي(راجع بارزن [1961 c]).

نظريات الارجودك : Ergodic theorems

لكي تكون نظرية العمليات التصادفية مفيدة في وصف الانظمة الفيزيائية فانه من

الضروري ان نحسب من المشاهدات الخاصة بالعملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ الكميات الاحتمالية مثل دالة القيمة الوسطية

$$m(t) = E[X(t)],$$

قوة التغاير

$$K(s,t) = \text{Cov}[X(s), X(t)],$$

ودالة التوزيع ذو البعد الواحد

$$F_{X(t)}(x) = P[X(t) \leq x].$$

ان السؤال المطروح هو اذا شاهدنا سجلاً محدوداً مفرداً $\{X(t), t = 1, 2, \cdots, T\}$ للعملية التصادفية المتقطعة المعلم $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ اوسجلاً محدوداً $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ للعملية التصادفية المستمرة المعلم $\{X(t), t \geq 0\}$ تحت اي الظروف (ان وجدت) بالامكان استخدام هذا السجل لتقدير الاوساط المركزية مثل الاوساط اعلاه بواسطة تقديرات تكون ادق كلما يزداد طول السجل T

ان مشكلة تحديد الشروط التي عندها يكون حساب الاوساط لعينة العملية التصادفية مطابقاً تماماً للاوساط المركزية المقابلة والتي ظهرت في الميكانيكي الاحصائي بادىء الامر. الانظمة الفيزيائية التي لها هذا النوع من الخواص تسمى بالارجودك (راجع ص 356 ter Haar [1954] للحصول على اصل الكلمة ارجودك) .

البراهين الاولية الرياضية المقبولة لنظرية الارجودك (النظرية التي تخص الشروط التي وفقاً لها تطابق اوساط العينة الاوساط المركزية المقابلة) اعطيت من قبل von (1932) Birkhoff (1931) و Neumann اثبت بركوف اذا كانت $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ عملية ثابتة تماماً فان لكل دالة $g(\cdot)$ بحيث تكون الاوساط المركزية

$$E[g(X(t))]$$

موجودة لاوساط العينة

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} g[X(t)]$$

تتقارب باحتمال واحد [كلما T تقترب الى ∞). نحتاج ان نضع شروطاً اضافية معينة تسمى (بالمتري الانتقالي) لكي تقترب اوساط العينة الى الوسط المركزي $E[g(X(t))]$ والذي لايعتمد على . يعطي البرهان الدقيق لنظرية برخوف الارجودكية في كتاب Khintchine (1949) راجع ايضاً كتاب Loève (1960) Doob (1953)

مناقشة النظرية الارجودكية للعمليات التصادفية الثابتة تماما تقع خارج نطاق هذا الكتاب . لايشترط في العمليات التصادفية ان تكون ثابتة تماما لكي تخضع للنظرية الارجودكية . كما نبين ذلك الان .

اذا اعطيت اية عملية تصادفية متقطعة المعلم $\{X(t), t=1, 2, \cdots\}$ فاننا نعتبر متوسطات العينة المتتابعة

$$M_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X(t) \tag{2.6}$$

المتكونة من العينات الاكبر المتزايدة . يمكن ان يطلق اسم ارجودك على تتابع متوسطات العينة $\{M_T, T=1, 2, \cdots\}$ اذا كانت

$$\lim_{T\to\infty} \text{Var}[M_T] = 0. \tag{2.7}$$

نفسر المعادلة 2.7 كمايلي : لمتوسطات العينة المتعاقبة والمتكونة من دالة معاينة العملية التصادفية ، تباينات تقترب الى صفر عندما يقترب حجم العينة T الى ∞ .

وهكذا نستطيع في حالة حجوم العينة الكبيرة T ان نكتب M_T مساوية الى متوسطها المركزي بصورة تقريبية .

$$M_T \approx E[M_T] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m(t) \tag{2.8}$$

لمعظم دوال العينات التي يمكن مشاهدتها .

بصورة عامة يقال أن العملية التصادفية ارجودكية اذا كان لها خاصية استخدام اوساط العينة (الزمن) المتكونة من سجل المشاهدة كتقريب للاوساط المركزية (او المجتمع) . الطبيعة العامة للشروط التي يجب ان تحققها العملية التصادفية لكي تكون ارجودك مبينة في النظرية التالية (راجع بارزن [1958])

نظرية 2A :

الشرطان اللازم والضروري لكون متوسطات عينة العمليات التصادفية ارجودك نفرض ان $\{X(t), t=1, 2, \cdots\}$ عبارة عن عملية تصادفية لها قوة تغاير

$$K(s,t) = \text{Cov}[X(s), X(t)]$$

عبارة عن دالة محدودة ، اي توجد كمية ثابتة K_0 بحيث يكون

$$\operatorname{Var}[X(t)] = K(t,t) \le K_0 \qquad t = 1, 2, \cdots . \tag{2.9}$$

عندما تكون $t = 1, 2, \ldots$ نفرض ان $C(t)$ عبارة عن التغاير بين متوسط العينة رقم t ، M_t والمشاهدة رقم t ، $X(t)$:

$$C(t) = \operatorname{Cov}[X(t), M_t] = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} K(s,t). \tag{2.10}$$

لاجل ان تتحقق صحة المعادلة 2.7 فان الشرطين اللازم والضروري لذلك

$$\underset{t\to\infty}{\text{غا}}\; C(t) = 0. \tag{2.11}$$

بعبارة ثانية تكون متوسطات العينة ارجودك اذا كان الارتباط (للتغاير) بين متوسط العينة M_t والمشاهدة الاخيرة $X(t)$ اقل ثم اقل مع تزايد حجم العينة والعكس صحيح.

ملاحظة : في حالة عملية التغاير الثابت ذات دالة التغاير $R(v)$

$$C(t) = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} R(t-s) = \frac{1}{t}\sum_{v=0}^{t-1} R(v). \tag{2.12}$$

بتقارب التتابع $\{R(v), v = 0, 1, \cdots\}$ الى صفر عندما تقترب v الى ∞ اذا كانت

$$\underset{v\to\infty}{\text{غا}}\; R(v) = 0 \tag{2.13}$$

ويقال انها تقترب الى صفر في متوسط cesaro عندما تقترب v الى ∞ اذا كانت

$$\underset{t\to\infty}{\text{غا}}\; \frac{1}{t}\sum_{v=0}^{t-1} R(v) = 0. \tag{2.14}$$

يمكننا ان نبين ان المعادلة 2.13 تعني المعادلة 2.14 نحصل من النظرية 2A على الصيغ الاتية :

متوسطات عينة العملية التصادفية الثانية التغايرية $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ عبارة عن ارجودك اذا اقتربت دالة تغايرها $R(v)$ الى صفر في متوسط Cesaro عندما

تقترب v الى ∞ الشرط اللازم لكون متوسطات العينة عبارة عن ارجودك هو اقتراب $R(v)$ الى صفر عندما تقترب v الى ∞.

برهان نظرية 2A ان المعادلة 2.7 تعني المعادلة 2.11 حيث نحصل على ذلك من الحقيقة الاتية باستخدام متباينة Schwarz's

$$|C(t)|^2 \leq \text{Var}[X(t)]\,\text{Var}[M_t] \leq K_0\,\text{Var}[M_t].$$

لكي تبرهن ان المعادلة 2.11 تعني المعادلة 2.7 نبرهن اولا الصيغة الاتية :

$$\text{Var}[M_n] = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kC_k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \text{Var}[X(k)], \qquad (2.15)$$

حيث $C_k = C(k)$ لكي تبرهن المعادلة 2.15 تكتب

$$\begin{aligned} n^2\,\text{Var}[M_n] &= \sum_{k=1}^{n} \text{Var}[X(k)] + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} \text{Cov}[X(j), X(k)] \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \text{Cov}[X(j), X(k)] - \sum_{k=1}^{n} \text{Var}[X(k)] \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} kC_k - \sum_{k=1}^{n} \text{Var}[X(k)]. \end{aligned}$$

لكي نثبت ان المعادلة 2.11 تعني المعادلة 2.7 وهي ضوء المعادلة 2.15 نحتاج ان نثبت ان 2.11 تعني ان :

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـــا}} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kC_k = 0.$$

لكل $n > N > 0$,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kC_k \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} |kC_k| + \sup_{N<k} |C_k|,$$

والتي ستقترب الى صفر عندما تقترب n الى ∞ ثم تقترب N ثانيا الى ∞ وهو المطلوب اثباته .

نستطيع توسيع مفهوم ارجودك لمتوسطات العينة لتشمل السلاسل الزمنية المستمـــرة المعلم . اذا اعطيت عينة $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ فان متوسط العينة يعرف كما يلي :

$$M_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt.$$

قبل ان نناقش طبيعة M_T نناقش اولا معنى وخواص التكاملات التي يكون تكاملها عبارة عن عمليات تصادفية . نوضح هذا المفهوم في البند القادم .

التمارين

احسب لكل من العمليات التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ المعرفة في التمارين 2.1 الى 2.12 ما يلي :

(i) دالة القيمة الوسطية $m(t) = E[X(t)]$

(ii) قوة التغاير $K(s,t) = \text{Cov}[X(s), X(t)]$

(iii) دالة التغاير $R(v)$ اذا كانت العملية ثابتة تغايرية

2.1 $X(t) = A + Bt$ حيث ان A ، B متغيران عشوائيان مستقلان كل منهما موزع حسب التوزيع المنتظم في وحدة الطول .

2.2 $X(t) = A + Bt + Ct^2$ حيث A ,B ، C متغيرات عشوائية مستقلة لها متوسط يساوي 1 وتباين يساوي 1

2.3 $X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ حيث ω كمية ثابتة موجبة A ، B متغيران عشوائيان غير مرتبطين لهما متوسطان يساويان صفراً وتباينان يساويان σ^2

2.4 $X(t) = \cos(\omega t + \theta)$ حيث ω كمية ثابته موجبة θ موزعة توزيعا منتظما في الفترة من صفر الى 2π افرض في التمارين 2.5 الى 2.7 ان $\{W(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية وينر بمعلم يساوي σ^2 .

2.5 $X(t) = W(t + L) - W(t)$ حيث A كمية ثابتة موجبة

2.6 $X(t) = At + W(t)$ حيث A كمية ثابتة موجبة

2.7 $X(t) = At + W(t)$ حيث متغير عشوائي مستقل عن عملية $\{W(t), t \geq 0\}$ موزع توزيعا طبيعيا بمتوسط m وتباين σ_1^2 .

2.8 نفرض ان $X(t) = f(t + \theta)$ حيث $f(t)$ عبارة عن دالة دورية ذات دورة تساوي L وان θ موزعة توزيعاً منتظماً في الفترة من صفر الى L

2.9 موجة الجيب الحقيقي ذو التردد العشوائي والطور العشوائي . نفرض ان $X(t) = \cos(At + \theta)$ حيث A ، θ عبارة عن متغيرين عشوائيين

مستقلين ، θ موزعة توزيعاً منتظماً في الفترة من صفر الى 2π و A ا دالة كثافة احتمال $f_A(x) = \{\pi(1+x^2)\}^{-1}$

2.10 موجـه الجيب التي يكون لهـا طور عبارة عن عملية تصادفية . تعـــرف $X(t) = \cos(\omega t + \varphi(t))$ حيث ω كمية ثابتة موجبـــة وان $\{\varphi(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية معرفة كمايلي

$$\varphi(t) = W(t+1) - W(t),$$

حيث ان $\{W(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية وينر بالمعلم σ^2

2.11 نفرض ان $X(t) = \sum_{j=1}^{q} (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t)$, حيث ان q عبـــارة عن عدد صحيح ، وان $\omega_1, \cdots, \omega_q$ كميات ثابتة موجبة ، وان $A_1, B_1, \cdots, A_q, B_q$ متغيرات عشوائية غير مرتبطة لها متوسطـــات تساوي صفراً وتباينات تساوي $\sigma_j^2 = E[A_j^2] = E[B_j^2]$ عـــلى الترتيب .

2.12 $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن الاشارة التلغرافية العشوائية (المعرفـة في البند 1-4) .

2.13 نفرض ان $\{Y(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية لها قيمتـــان A، B على الترتيب هما الاوقات التي تتغير فيها القيم الموزعة حسب عملية بواسون بمعدل متوسط ν . تكون قيمتا A ، B اي من الاعداد الحقيقية . اثبت ان العمليـة $Y(t)$ يمكـن تمثيلها بالمعادلة 4.1 من الفصل الاول حيث $X(t)$ عبارة عن الاشارة التلغرافية العشوائية . اوجد دالة القيمـــة الوسطية ، قوة التغاير ودالة خاصة $Y(t)$ ذات البعدين .

2.14 نفرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية بتزايد ثابـــت مستقل يحقق $X(0) = 0$

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp[\nu t\{\tfrac{1}{3}(e^{iu} + 2e^{iu}) - 1\}].$$

اوجد دالة القيمة الوسطية ، قوة التغاير ، ودالة الخاصية ذات البعديـــن للعملية واحد – ناقص واحد $\{X(t), t \geq 0\}$ المعرفة بالمعادلة 4.4 في الفصل الاول .

2.15 الموجة التربيعية لبواسون ذات السعات العشوائية . نفرض ان $X(t)$ عبارة عن عملية تصادفية يتكون رسمها البياني من اجزاء افقية وطفرات ازمنة حدوث تغير قيمة $X(t)$ تكون حسب عملية بواسون بمعدل متوسط ν القيم المتتابعة التي تأخذها العملية عند تغير قيمتها في كل فترة زمنية عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي A ذي العزوم الثانية المحدودة .

2.16 نفرض ان $X(t) = \sin \omega t$ حيث ω موزعة حسب التوزيع المنتظم في الفترة من صفر الى 2π . (i) اثبت ان $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ ثابت تغايري وانها ليست ثابتة تماما . (ii) اثبت ان العملية $\{X(t), t \geq 0\}$ ليست ثابتة تغايرية وليست ثابتة تماما .

2.17 اثبت ان كل تتابع $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ من المتغيرات العشوائية المتماثلة التوزيع يكون ثباتاً تماما برتبة 1 .

2.18 نفرض ان X ، Y عبارة عن متغيرين عشوائيين موزعين توزيعاً طبيعياً مستقلا بمتوسطين يساويان صفراً وتباينين يساويان 1 نفرض ان التتابع $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ يعرف كما يلي :

$X(t) = X$ اذا كانت t ليست من مضاعفات الرقم 4 وان
$X(t) = Y$ اذا كانت t مضاعفات الرقم 4 اثبت $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ ثابتة تماماً برتبة 1 لكنها ليست ثابتة تماما برتبة 2 .

2.19 اثبت اذا كانت $\{X(t), t \in T\}$ ثابتة تماما برتبة k فان $\{X(t), t \in T\}$ ثابتة تماما برتبة k' لأي عدد صحيح k' اقل من k

2.20 اثبت ان الاشارة التلغرافية عبارة عن عملية ثابتة تماما .

2.21 برهن ان العملية $\{X(t), t \geq 0\}$ المعروفة في المكملة 2A من الفصل الاول (i) ثابتة تغايرية (ii) ثابتة بصورة تامة .

3-3 تكامل وتفاضل العمليات التصادفية :

اذا شاهدنا العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ بصورة مستمرة في الفاصلة $0 \leq t \leq T$ فانه يهمنا في هذ ا المجال متوسط العينة .

$$M_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t)\, dt. \qquad (3.1)$$

قبل المباشرة بايجاد متوسط وتباين M_T يجب ان نوضح اولا – تعريف التكامل في المعادلة 3.1 وتحديد الشروط المطلوبة لوجود التكامل .

التعريف الطبيعي لتكامل $\int_a^b X(t)\, dt$ العملية التصادفية في الفترة $a < t \leq b$ هـو عبارة عن غاية المجموعات التقريبية :

$$\int_a^b X(t)\, dt = \text{غـا} \sum_{k=1}^{n} X(t_k)\{t_k - t_{k-1}\}, \qquad (3.2)$$

تؤخذ الغاية ضمن تقسيمات جزئية للفترة $(a,b]$ الى فترات جزئية كما مبين ادنـاه $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ حيث اطول فترة جزئية $\max_{k=1,\ldots,n} (t_k - t_{k-1})$ تقترب الى صفر .

لاجل تعريف عمليات الغاية المستخدمة في المعادلة 3.2 نعتبر مختلف انواع التقارب التي يمكن لتتابع المتغيرات العشوائية ان تقترب اليها . ان من اهم انواع التقارب هو التقارب باحتمال واحد التقارب في الاحتمال ، التقارب في مربع المتوسط .

اذا اعطيت متغيرات عشوائية $Z_1, Z_2, \cdots$ فاننا نقول

(i) ان التتابع $\{Z_n\}$ يتقارب الى Z باحتمال واحد اذا كان

$$P[\underset{n\to\infty}{\text{غـا}}\, Z_n = Z] = 1, \qquad (3.3)$$

(ii) يتقارب التتابع $\{Z_n\}$ الى Z في الاحتمال اذا كان لـكل من $\epsilon > 0$

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}}\, P[\,|\, Z_n - Z \,|\, > \epsilon] = 0, \qquad (3.4)$$

(iii)　بتقارب التتابع $\{Z_n\}$ الى Z في مربع المتوسط اذا كان لكـــل متغير عشوائي Z_n مربع متوسط محدود.واذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} E[\,|\,Z_n - Z\,|^2] = 0. \tag{3.5}$$

للحصول على العلاقة بين انواع التقارب يراجع القاريء كتاب الاحتمالات الحديثة ص 415 ندرس في هذا الكتاب بصورة رئيسية التقارب في مربع المتوسط .

ان لعائلة المجموعات التقريبية في جهة المعادلة 3.2 المعنى غاية معينة بمعنى التقارب في مربع المتوسط ، ان الشرط اللازم والضروري لهذه الغاية هو ان يكون لحاصل الضـــرب $E[X(s)\,X(t)]$ الذي يعتبر دالة لـ (s,t) تكامل ريمان ضمـــن المجموعة $\{(s,t):\, a \le s \le b,\, a \le t \le b\}$ راجع Loève ‎[1960], ‎ص472)

نستخدم النظرية الاتية بكثرة في هذا الكتاب والتي سنذكرها بدون برهان .

نظرية 3A

نفرض ان $\{X(t),\, t \ge 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية مستمرة المعلم ذات عزوم ثانية محدودة ، ولها دالة قيمة وسطية وقوة تغاير

$$m(t) = E[X(t)], \tag{3.6}$$
$$K(s,t) = \mathrm{Cov}[X(s),\, X(t)], \tag{3.7}$$

عبارة عن دالتين مستمرتين لـ s ، t يعرف التكامل $\int_a^b X(t)$ وكأنه غاية في مربع المتوسط للمجموعات التقريبية الاعتيادية المبينة في المعادلة 3.2 لكل $b > a \ge 0$ نحصل على متوسط ، مربع متوسط ، وتباين التكامل كما يلي :

$$E\Big[\int_a^b X(t)\,dt\Big] = \int_a^b E[X(t)]\,dt = \int_a^b m(t)\,dt, \tag{3.8}$$

$$E\Big[\,\Big|\int_a^b X(t)\,dt\,\Big|^2\Big] = E\Big[\int_a^b\int_a^b X(s)X(t)\,ds\,dt\Big] = \int_a^b\int_a^b E[X(s)X(t)]\,ds\,dt, \tag{3.9}$$

$$\mathrm{Var}\Big[\int_a^b X(t)\,dt\Big] = \int_a^b\int_a^b \mathrm{Cov}[X(s),\,X(t)]\,ds\,dt = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,ds\,dt. \tag{3.10}$$

اضافة الى ذلك ، فان لاية اعداد حقيقية غير سالبة d, c, b, a

$$E\left[\int_a^b X(s)\, ds \int_c^d X(t)\, dt\right] = \int_a^b ds \int_c^d dt\, E[X(s)X(t)], \qquad (3.11)$$

$$\mathrm{Cov}\left[\int_a^b X(s)\, ds, \int_c^d X(t)\, dt\right] = \int_a^b ds \int_c^d dt\, K(s,t). \qquad (3.12)$$

نستطيع ان نذكر المعادلات 3.8 ,3.9 , 3.11 بديهيا من خلال العمليات الخطية للتكامل وتبديل مكان التوقعات . يمكننا من المعادلتين 3.8 ، 3.9 استنتاج المعادلة 3.10 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[\int_a^b X(t)\, dt\right] &= E\left[\left|\int_a^b X(t)\, dt\right|^2\right] - E^2\left[\int_a^b X(t)\, dt\right] \\
&= \int_a^b \int_a^b E[X(s)X(t)]\, ds\, dt - \int_a^b \int_a^b m(s)m(t)\, ds\, dt \\
&= \int_a^b \int_a^b \{E[X(s)X(t)] - m(s)m(t)\}\, ds\, dt \\
&= \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, ds\, dt.
\end{aligned}$$

بنفس الطريقة ، نستنتج المعادلة 3.12 من المعادلتين 3.8 , 3.11

بما ان $K(s,t)$ دالة متناظرة (اي ان $K(t,s) = K(s,t)$] فاننا نستنتج من المعادلة 3.10 التعبير المهم الاتي :

$$\mathrm{Var}\left[\int_a^b X(t)\, dt\right] = 2 \int_a^b dt \int_a^t ds\, K(s,t). \qquad (3.13)$$

مثال : 3A.

ازاحة الجزيئة في الحركة البراونيه الحرة :

تأمل جزيئة تتحرك على خط مستقيم عند اصطدامها بجزيئات اخرى . نفترض ان العدد $N(t)$ لعدد مرات اصطدام الجزيئة الى ان يصل الوقت الى t هوعبارة عن عملية بواسون بمعدل متوسط v نفترض انعكاس سرعة الجزيئة عند اصطدامها مع جزيئة اخرى . وهكذا فان سرعة الجزيئة ستكون v او $-v$ حيث v كمية ثابتة معلومة اذا رمزنا لسرعة الجزيئة في الزمن t بالرمز $V(t)$ واذا كانت سرعة الجزيئة الابتدائية $V(0)$ باحتمال متساوٍ تكون v او $-v$ فان

$$V(t) = V(0)(-1)^{N(t)}$$

عبارة عن الاشارة التلغرافية العشوائية ، الى حد كمية ثابتة مضروبة تساوي v وهكذا فإن لـ $\{V(t), t \geq 0\}$ دالة قيمة وسطية وقوة تغاير مبينتان ادناه :

$$E[V(t)] = 0, \qquad E[V(s)V(t)] = v^2 e^{-\beta|s-t|}$$

حيث $\beta = 2v$. اذا رمزنا لمقدار الازاحة من الموقع في الزمن صفراً الى الموقع في الزمن t بالرمز $X(t)$ فان

$$X(t) = \int_0^t V(t')\, dt'.$$

نوضح ذلك بصورة اساسية

$$\begin{aligned} E\Big[\,|\int_0^t V(t')\, dt'\,|^2\Big] &= E\Big[\int_0^t \int_0^t V(t_1)V(t_2)\, dt_1\, dt_2\Big] \\ &= \int_0^t \int_0^t E[V(t_1)V(t_2)]\, dt_1\, dt_2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

بما ان $E[V(s)\,V(t)]$ دالة لـ (s,t) مستمرة فنحصل من النظرية 3A على قيمة موجودة للتكامل $\int_0^t V(t')\, dt'$ (وان هذه القيمة عبارة عن غاية في مربع المتوسط للمجموعات التقريبية الاعتيادية وتساوي تكامل ريمان) وان لهذا التكامل عزماً ثانيا يحقق المعادلة 3.14 . وهكذا فان مربع متوسط الازاحة سيكون

$$\begin{aligned} E[\,|X(t)|^2\,] &= 2\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \{v^2 e^{-\beta(t_1 - t_2)}\} \\ &= \frac{2v^2}{\beta^2}\,(e^{-\beta t} - 1 + \beta t). \end{aligned}$$

عندما تكون الفترة الزمنية قصيرة جداً اوطويلة جداً فـــأن مـــربع متوسط الازاحــــة سيكون

$$\begin{aligned} E[\,|X(t)|^2\,] &= \frac{2v^2}{\beta} t \qquad (t \to \infty) \\ &= v^2 t^2 \qquad (t \to 0), \end{aligned}$$

اي ان

$$\begin{aligned} \underset{t \to \infty}{\text{غـــا}}\ \frac{1}{t} E[\,|X(t)|^2\,] &= \frac{2v^2}{\beta}, \\ \underset{t \to 0}{\text{غـــا}}\ \frac{1}{t^2} E[\,|X(t)|^2\,] &= v^2. \end{aligned}$$

مثال 3B)

تكامل عملية وينر. نفرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية وينر بمعلم يساوي σ^2

نعرف عملية تصادفية جديدة $\{Z(t), t \geq 0\}$ كما يلي :

$$Z(t) = \int_0^t X(s)\, ds.$$

تعرف عملية $\{Z(t), t \geq 0\}$ بتكامل عملية وينر.

ان اول خطوة في ايجاد قانون احتمال العملية $\{Z(t), t \geq 0\}$ هي ايجاد دالة قيمة العملية الوسطية وقوة تغايرها . بما ان $E[X(s)] = 0$ لجميع قيم s وان $K_X(s,t) = E[X(s)\, X(t)] = \sigma^2 s \text{ for } t > s \geq 0$ عندما $t > s \geq 0$ فاننا نحصل من النظرية 3A على :

$$E[Z(t)] = \int_0^t E[X(s)]\, ds = 0 \quad \text{لجميع قيم } s \tag{3.15}$$

نجد تباين $Z(t)$ قبل ان نستخرج قوة تغايرها :

$$\begin{aligned}\text{Var}[Z(t)] &= \int_0^t dv \int_0^t du\, K_X(u,v) = 2 \int_0^t dv \int_0^v du\, K_X(u,v) \\ &= \int_0^t dv \int_0^v du\; 2\sigma^2 u = \sigma^2 \int_0^t dv\, v^2.\end{aligned}$$

وهكذا فان

$$\text{Var}[Z(t)] = \sigma^2 \frac{t^3}{3} \cdot \tag{3.16}$$

لايجاد قوة تغاير $Z(t)$ نكتب $Z(t)$ عندما $t > s > 0$ كما يلي

$$Z(t) = Z(s) + \int_s^t \{X(v) - X(s)\}\, dv + (t - s)X(s).$$

بما ان $\{X(t), t \geq 0\}$ تزايداً مستقلاً اذن

$$E[Z(s)Z(t)] = E[Z^2(s)] + (t - s)E[Z(s)X(s)]. \tag{3.17}$$

ان

$$E[X(s)Z(s)] = E[X(s) \int_0^s X(u)\, du] = \int_0^s E[X(u)X(s)]\, du$$
$$= \sigma^2 \int_0^s u\, du = \tfrac{1}{2}\sigma^2 s^2. \qquad (3.18)$$

نحصل من المعادلات 3.18 , 3.17, 3.16 عندما يكون $0 < s < t$ على

$$E[Z(s)Z(t)] = \tfrac{1}{3}\sigma^2 s^3 + (t-s)\,\tfrac{1}{2}\sigma^2 s^2$$
$$= \frac{\sigma^2}{6} s^2 (3t - s). \qquad (3.19)$$

مثال 3C

المتوسط والتباين لمتوسط العينة . تأمل عملية تصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ تتم مشاهدتها بصورة مستمرة ضمن الفترة الزمنية $0 \leq t \leq T$ من النظرية 3A يتبين أن لمتوسط العينة M_T المعرفة في المعادلة 3.1 متوسطاً وتبايناً يحسبان كما يلي :

$$E[M_T] = \frac{1}{T} \int_0^T m(t)\, dt, \qquad (3.20)$$

$$\operatorname{Var}[M_T] = \frac{2}{T^2} \int_0^T dt \int_0^t ds\, K(s,t), \qquad (3.21)$$

حيث $m(t)$ و $K(s,t)$ عبارة عن دالة القيمة الوسطية وقوة تغاير العملية على الترتيب

نفترض . كمثال . ان $X(t)$ تمثل عدد الوحدات التي تقوم بتأدية الخدمة في نظام انتظار يحتوي على عدد من القنوات الخدمية غير المحدودة وان هذه الوحدات الخدمية تكون مشغولة في الزمن t يمكن ان نبرهن (راجع البند 4-5 ان دالة قيمة $X(t)$ الوسطية وقوة تغايرها يكونان كما يلي :

$$m(t) = \nu\mu \quad \text{لجميع قيم} \quad t,$$
$$K(s,t) = \nu\mu e^{-(|t-s|/\mu)} \quad \text{لجميع قيم} \quad s, t \geq 0, \qquad (3.22)$$

اذا افترضنا مايلي : (i) وصول الزبائن عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة تساوي ν , (ii) ازمنة خدمة الزبائن عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة . كل منها موزع

حسب التوزيع الاسي بمتوسط μ ، (iii) استمرارية عمل نظام الانتظار لمدة طويلة .
من المعادلات 3.20 ، 3.21 ، 3.22 يتبين ان لمتوسط العينة M_T متوسطاً وتبايناً

مبينين كما يلي :

$$
\begin{aligned}
E[M_T] &= \nu\mu, \\
\operatorname{Var}[M_T] &= \frac{2\nu\mu}{T^2}\int_0^T dt \int_0^t ds\, e^{-(t-s)/\mu} \\
&= \frac{2\nu\mu^2}{T^2}\int_0^T dt(1-e^{-t/\mu}) \\
&= \frac{2\nu\mu^2}{T} - \frac{2\nu\mu^3}{T^2}(1-e^{-T/\mu}). \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

نستطيع تحديد طول فترة المشاهدة الزمنية المطلوبة لتقدير المعلمين ν ، μ بدرجة من الدقة محددة مسبقاً وذلك باستخدام المعادلة 3.23 وبعض المعلومات السابقة حول هذين المعلمين .

مشتقات العمليات التصادفية :

نفرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية ذات عزوم ثانية محدودة .
تعرف المشتقة $X'(t)$ كما يلي :

$$X'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}, \qquad (3.24)$$

حيث تؤخذ الغاية على اساس التقارب في مربع المتوسط . يمكننا اثبات وجود قيمة للجهة اليمنى من المعادلة 3.24 كغاية في متوسط المربع ان وجدت قيمتا الغايتين

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{E[X(t+h)-X(t)]}{h}, \qquad (3.25) \\
&\lim_{h\to 0,\, h'\to 0}\operatorname{Cov}\left[\frac{X(t+h)-X(t)}{h},\ \frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right]
\end{aligned}
$$

والعكس صحيح . الشرط اللازم لتحقيق صحة المعادلة 3.25 هو (i) امكانية تفاضل دالة القيمة الوسطية $m(t)$ (ii) المشتقة الجزئية

$$\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}K(s,t) \qquad (3.26)$$

تكون موجودة ومستمرة . يمكننا ان نثبت وفقاً لهذه الشروط ان

$$E[X'(t)] = E\left[\frac{d}{dt}X(t)\right] = \frac{d}{dt}E[X(t)] = m'(t), \tag{3.27}$$

$$\mathrm{Cov}[X'(s),X'(t)] = \mathrm{Cov}\left[\frac{d}{ds}X(s), \frac{d}{dt}X(t)\right] = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}\mathrm{Cov}[X(s),X(t)] \tag{3.28}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t}K(s,t),$$

$$\mathrm{Cov}[X'(s),X(t)] = \mathrm{Cov}\left[\frac{d}{ds}X(s),X(t)\right] = \frac{d}{ds}\mathrm{Cov}[X(s),X(t)] \tag{3.29}$$
$$= \frac{\partial}{\partial s}K(s,t).$$

نلاحظ بديهياً في المعادلات 3.27 ، 3.28 ، 3.29 امكانية تبديل موقع عمليات التفاضل والتوقع ، وبنفس الطريقة نلاحظ في المعادلتين 3.8 ، 3.9 امكانية تبديل موقع عمليات التكامل والتوقع .

يقال ان العملية التصادفية $\{X(t),\ t \geq 0\}$ تفاضلية في مربع المتوسط ان وجدت قيمة للمشتقة $X'(t)$ كفاية في مربع المتوسط ولجميع قيم $t \geq 0$

نفرض الان أن $\{X(t),\ t \geq 0\}$ عبارة عن عملية ثابتة تغايرين توجد لها مشتقة $X'(t)$ لجميع قيم $t \geq 0$

السؤال المطروح : هل ان عملية المشتقة $\{X(t),\ t \geq 0\}$ ثابتة تغايرية نفرض ان

$$K_X(s,t) = R_X(s-t) \tag{3.30}$$

عبارة عن قوة تغاير $\{X'(t),\ t \geq 0\}$ اذن قوة تغاير $\{X'(t),\ t \geq 0\}$ يتكون كما يلي :

$$K_{X'}(s,t) = -R_X''(s-t), \tag{3.31}$$

حيث

$$R_X''(v) = \frac{d^2}{dv^2}R_X(v) \tag{3.32}$$

عبارة عن المشتقة الثانية لدالة التغاير $R_X(v)$. وهكذا فان عمليه المشتقة $\{X'(t),\ t \geq 0\}$ ثابتة تغايرية بدالة تغاير $R_{X'}(v)$ تعطي كما يلي :

$$R_{X'}(v) = -R_X''(v). \tag{3.33}$$

نلاحظ ان العملية التصادفية الثابتة التغايرية ذات دالة القيمة الوسطية المتفاضلة تكون تفاضلية في مربع المتوسط اذا امكن تفاضل دالة تغايرها مرتين والعكس صحيح .

نلاحظ ان العملية الثانية التغايرية ذات دالة التغاير

$$R(v) = e^{-\alpha|v|}$$

لايمكن تفاضلها في مربع المتوسط لانه لايمكن تفاضل $R(v)$ عند النقطة $v = 0$

معادلات التفاضل التصادفية :

في كثيرمن الانظمة الفيزيائية ترتبط الكمية الخارجة $X(t)$ (والتي يمكن ان تكون ، ازاحة ، انكساراً ، سرعة ، تياراً) بالكمية الداخلة $I(t)$ (قوة ، فولتية ، تيار) بواسطة معادلة تفاضلية . اذا كانت الكمية الداخلة عبارة عن عملية تصادفيةفان الكمية ، الخارجة $X(t)$ ستكون عملية تصادفية . وهكذا سنعتبر العملية التصادفية $X(t)$ الناتجة من حل المعادلات التفاضلية الخطية .

$$a_0(t)X^{(n)}(t) + a_1(t)X^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)X(t) = I(t) \qquad (3.34)$$

حيث ان الدالة الداخلة $I(t)$ عبارة عن عملية تصادفية وان المعاملات $a_k(t)$ عبارة عن دوال غيرعشوائية (والتي تكون كميات ثابتة اودوالاً ا t) . العملية التصادفية $X(t)$ التي تحقق المعادلة 3.34 يقال انها نتيجة حل المعادلة التفاضلية التصادفية . تؤدي مثل هذه العمليات التصادفية دوراً مهماً في تحليل السلاسل الزمنية . وفي نظرية الاتصالات الاحصائية (راجع المثال 6B) .

متباينة جيبجيف للعمليات التصادفية :

تعتبر دالة القيمة الوسطية للعملية التصادفية وكانها نوع من دوال - الاوساط حيث تتجمع مختلف مفاهيم العملية حولها اوقريباً منهافي حالات معينة نستطيع تحديد الموقع المجاور للعملية بحيث تقع مفاهيم العملية ضمن ذلك الموقع المجاورباحتمال قوي . مثلاً ،

يمكننا برهنة النظرية الاتية والتي تعتبركمتباينة جينسجيف للعمليات التصادفية (مقارنة مع Whittle [1958]) ، اذا كانت $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية تفاضلية في مربع المتوسط .

نظرية 3B

نفرض ان $\{X(t), a \leq t \leq b\}$ عبارة عن عملية تصادفية في مربع المتوسط .
افرض ان

$$\begin{aligned} C(t) &= \{E[\,|\,X(t)\,|^2\,]\}^{1/2}, \\ C_1(t) &= \{E[\,|\,X'(t)\,|^2\,]\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

فان

$$E[\sup_{a \leq t \leq b} X^2(t)] \leq \tfrac{1}{2}\{C^2(a) + C^2(b)\} + \int_a^b C(t)C_1(t)\, dt. \tag{3.36}$$

ملاحظة

$$P[\sup_{a \leq t \leq b} |\,X(t)\,| > \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2} E[\sup_{a \leq t \leq b} X^2(t)].$$

اذن توافينا المعادلة 3.36 بحد اعلى لاحتمال الحادثة $|\,X(t)\,| > \epsilon$ لبعض قيم t الموجودة بين $a \leq t \leq b$ اذا رغبنا في ايجاد حد أعلى لاحتمال [لجميع قيم $P[\,|\,X(t) - m(t)\,| \leq \epsilon] \quad a \leq t \leq b$
وقوع العملية التصادفية ضمن منطقة محددة مسبقا حول دالة قيمتها الوسطية في الفاصلة $a \leq t \leq b$ فاننا نستطيع الحصول على ذلك باستخدام المتباينة : لجميع قيم t

$$\begin{aligned} & P[\,|\,X(t) - m(t)\,| \leq \epsilon] \quad a \leq t \leq b \\ & \geq 1 - \left\{\frac{\sigma^2[X(a)] + \sigma^2[X(b)]}{2\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon^2}\int_a^b \sigma[X(t)]\sigma[X'(t)]\, dt\right\}. \end{aligned}$$

لكي نوضح هذه النتائج ـ دعنا نتأمل العملية التصادفية الثابتة التغايرية $\{X(t), t \geq 0\}$ ذات متوسطات تساوي صفراً ودالة تغاير

$$R(v) = e^{-\alpha|v|}(1 + \alpha\,|\,v\,|\,),$$

حيث α كمية ثابتة موجبة

بما ان

$$R'(v) = -\alpha^2 v e^{-\alpha|v|},$$
$$R''(v) = \alpha^2 e^{-\alpha|v|}(\alpha\,|\,v\,| - 1),$$

فان $\{X(t), t \geq 0\}$ تفاضلية وان

$$E[\,|\,X'(t)\,|^2\,] = -R''(0) = \alpha^2.$$

بما ان $\sigma^2[X(t)] = R(0) = 1$ لجميع قيم t, فان لكل فترة من a الى b :

$$E[\sup_{a \leq t \leq b} X^2(t)] \leq 1 + (b-a)\alpha$$

برهان النظرية 3B لاحظ اولا ان

$$X^2(t) = X^2(a) + 2\int_a^t X'(u)X(u)\,du = X^2(b) - 2\int_t^b X'(u)X(u)\,du.$$

اذن لكل t في الفترة من a الى b

$$2X^2(t) = X^2(a) + X^2(b) + 2\int_a^t X'(u)X(u)\,du - 2\int_t^b X'(u)X(u)\,du$$
$$\leq X^2(a) + X^2(b) + 2\int_a^b |\,X(u)X'(u)\,|\,du.$$

نتيجة لذلك ستكتب مايلي :

$$\sup_{a \leq t \leq b} X^2(t) \leq \tfrac{1}{2}\{X^2(a) + X^2(b)\} + \int_a^b |\,X'(u)X(u)\,|\,du.$$

بعد اخذ التوقعات نحصل على :

$$E[\sup_{a \leq t \leq b} X^2(t)] \leq \tfrac{1}{2}\{E[X^2(a)] + E[X^2(b)]\} + \int_a^b E[\,|\,X'(u)X(u)\,|\,]\,du$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\{E[X^2(a)] + E[X^2(b)]\} + \int_a^b \{E[X^2(u)]E[X'^2(u)]\}^{1/2}\,du.$$

التمارين :

اوجد في التمارين 3.1 الى 3.4 متوسط وتباين متوسط العينة

$$M_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt,$$

حيث $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية توصف في التمرين ذو العلاقـــــة

3.1 $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون بكثافة ،

3.2 $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن الاشارة التلغرافية العشوائية (المعرفة في البنـــد

3.3 $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تزايدة لعملية بواسون (المعرفة في المثـال

1C) .

3.4 $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن تكامل عملية وينر (المعرفة في المثال 3B)

3.5 اثبت عدم امكانية تفاضل عملية وينر في مربع المتوسط .

تأمل في التمارين 3.6 الى 3.11 عملية تصادفية ثابتة تغايريـــــــة $\{X(t), t \geq 0\}$ ذات دالة قيمة وسطية يمكن تفاضلها ودالة تغاير. $R(v)$ معطاة : (i) هل توجد مشتقة تصادفية $X'(t)$ (كفاية في مربع المتوسط) (ii) ان وجدت مشتقة تصادفية اوجد لكل عدديـــن حقيقيين v , t ما يلي :

(a) $E[X(t)X'(t)]$,
(b) $E[X(t)X'(t+v)]$, $E[X'(t)X(t+v)]$,
(c) $E[X'(t)X'(t+v)]$.

لاحظ ان α ، β كميتان موجبتان ثابتتان

3.6 $$R(v) = e^{-\alpha|v|}\left\{\cos \beta v + \frac{\alpha}{\beta}\sin \beta\,|\,v\,|\right\};$$

3.7 $$R(v) = e^{-\alpha|v|}\{1 + \alpha\,|\,v\,|\};$$

3.8 $$R(v) = \frac{1}{\beta}e^{-\beta|v|} - \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha|v|}, \text{ where } \alpha \geq \beta;$$

3.9 $$R(v) = e^{-\alpha|v|};$$

3.10 $$R(v) = \frac{1}{\alpha^2 + v^2};$$

3.11 $$R(v) = \frac{\sin \alpha v}{v}.$$

اوجد في التمارين 3.12 الى 3.14 قوة تغاير العملية التصادفيـــــــة $\{Y(t), t \geq 0\}$ المعرفة كما يلي :

$$Y(t) = \frac{1}{L}\int_t^{t+L} X(s)\,ds,$$

حيث L كميةثابتة موجبة ، وان لـ $\{X(t), t \geq 0\}$ قوة تغاير معطاه

3.12 $$\text{Cov}[X(s), X(t)] = \sigma^2 \min(s,t).$$

3.13 $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن ثابت تغايري بدالة تغاير

3.14 $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن ثابت تغايري بدالة تغاير

$$R(v) = 1 - |v| \quad \text{if} \quad |v| \leq 1,$$
$= 0$ ماعدا ذلك

3-4 العمليات الطبيعية :

يتضح الدور الاساسي للتوزيع الطبيعي (توزيع كاشيان) في النظرية الاحتمالية كما يلي

(أ) يكون توزيع العديد من المتغيرات العشوائية المستخدمة في تطبيقات نظرية الاحتمال طبيعياً .

(ب) ان قانون الاحتمال الطبيعي اسهل وانسب في التطبيق . وبنفس الطريقة تؤدي العمليات الطريقة دوراً مهماً في نظرية العمليات العشوائية بسبب :

(أ) تقريب العديد من العمليات العشوائية بالعمليات الطبيعية .

(ب) دراسة العمليات الطبيعية اسهل من دراسة العمليات الاخرى .

المتغيرات العشوائية الموزعة توزيعاً طبيعياً :

توزع المتغيرات العشوائية $X_1, \cdots, X_n$ توزيعاً طبيعياً اذا كانت دالة الخاصية المشتركة لهذه المتغيرات لاي عدد حقيقي $u_1, \cdots, u_n$, كما يلي :

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(u_1, \cdots, u_n) = \exp\left\{i \sum_{j=1}^{n} u_j m_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} u_j K_{jk} u_k\right\} \qquad (4.1)$$

حيث $j, k = 1, 2, \cdots, n$

وان

$$m_j = E[X_j], \quad K_{jk} = \text{Cov}[X_j, X_k]. \qquad (4.2)$$

اذا كانت لمصفوفة التغايرات الاتية :

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

مصفوفة مقلوبة

$$K^{-1}=\begin{bmatrix} K^{11} & \cdots & K^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ K^{n1} & \cdots & K^{nn} \end{bmatrix},$$

فاننا نستطيع برهنة أن لـ $X_1, \cdots, X_n$ كثافة احتمال مشتركة لاي عدد حقيقي $x_1, \cdots, x_n,$ وكما يلي :

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{|K|^{1/2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}(x_j-m_j)K^{jk}(x_k-m_k)\right\}, \quad (4.4)$$

وان $|K|$ محدودة المصفوفة K نستخدم صيغة مقلوب كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية $X_1, \cdots, X_n$ لكي نبرهن المعادلة 4.4 وكما يلي.

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} du_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} du_n\, e^{-i(x_1u_1+\ldots+x_nu_n)}\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(u_1, \cdots, u_n) \quad (4.5)$$

لكي نبرهن المعادلة 4.4 بصورة كاملة نحتاج ان نبرهن اولا لاي عدد حقيقي $y_1, \cdots, y_n$ ولاي مصفوفة معرفة $\{K_{jk}\}$ لها مقلوب $\{K^{jk}\}$ ان

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}u_jy_j-\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}u_jK_{jk}u_k\right\}du_1\cdots du_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|K|}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}y_jK^{jk}y_k\right\}. \quad (4.6)$$

في حالة اشتقاق المعادلة 4.6 يراجع القارىء كتاب Cramér (1946) ص 118 او Friedman (1956) ص 105

تعريف العملية الطبيعية :

تعرف العملية التصادفية : $\{X(t), t \in T\}$ بانها عملية طبيعية اذا كان لاي عدد صحيح n ولاي مجموعة جزئية $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ عائدة الى T تكون المتغيرات العشوائية $X(t_1), \cdots X(t_n)$ موزعة حسب التوزيع الطبيعي المشترك

بمعنى آخر ان دالة خاصية هذه المتغيرات تكون معلومة لاي عدد من الاعداد الحقيقيـــة $u_1, u_2, \cdots, u_n$ ، وكما يلي :

$$\begin{aligned}\varphi_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}&(u_1, u_2, \cdots, u_n)\\ &= E[\exp i\{u_1X(t_1) + \cdots + u_nX(t_n)\}]\\ &= \exp\left\{i \sum_{j=1}^{n} u_jE[X(t_j)] - \tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} u_ju_k \operatorname{Cov}[X(t_j), X(t_k)]\right\} . \quad (4.7)\end{aligned}$$

باستخدام المعادلة 4.7 نحصل على معلومات مفيدة في ايجاد قانون الاحتمـــال بصورة كاملة للعملية وايضا من معرفة دالة القيمة الوسطية $E[X(t)]$ وقوة التغاير $\operatorname{Cov}[X(s), X(t)]$.

تعتبر عملية وينر عبارة عن مثال للعملية الطبيعية . نبرهن ان عملية وينر $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية طبيعية t ضوء المعادلة 4.7 . لكي نبرهن ذلك نثبت ان دالة خاصية $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ المشتركة لـ n نقطة من النقاط الزمنية $t_1, \cdots, t_n$, تكون على شكل المعادلة 4.7

$$\varphi_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(u_1, \cdots, u_n) = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sigma^2 \sum_{j,k=1}^{n} u_ju_k \min(t_j,t_k)\right\} .$$

عملياً لايمكن برهنة ان العملية التصادفية عبارة عن عملية طبيعية وذلك من خلال تعريف المعادلة 4.7 وانما باستخدام النظريتين 4A , 4B

الاجراءات الخطية على العمليات الطبيعية

ان اي عملية تصادفية . مثل $\int_0^t X(s)\,ds,\ X'(t),\ \text{or } X(t+1) - X(t)$ بالامكان الحصول عليها عن طريق الاجراءات الخطية على العملية الطبيعية وهذه الخاصية من اهم فوائد العمليات الطبيعية . نثبت صحة هذا القول بالنظريات الآتية :

نظرية : 4A

الخاصية الاساسية للمتغيرات العشوائية الموزعة توزيعاً طبيعياً :

نفرض ان $X_1, \cdots, X_n$ عبارة عن متغيرات عشوائية موزعة توزيعا طبيعيا بصورة مشتركة . نفرض ان $Y_1, \cdots, Y_m$ عبارة عن دوال خطية للمتغيرات $X_1, \cdots, X_n$

$$Y_1 = c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + \cdots + c_{1n}X_n$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \tag{4.8}$$
$$Y_m = c_{m1}X_1 + c_{m2}X_2 + \cdots + c_{mn}X_n.$$

ان ... ستكون موزعة توزيعاً طبيعياً بصورة مشتركة بدالة خاصية مشتركة :

$$\varphi_{Y_1,\ldots,Y_m}(u_1, \cdots, u_m) = \exp\left\{ i\sum_{j=1}^{m} u_j E[Y_j] - \tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} u_j u_k \operatorname{Cov}[Y_j, Y_k]\right\}, \tag{4.9}$$

بينما في حالة $j, k = 1, 2, \cdots, m$

$$E[Y_j] = c_{j1}E[X_1] + \cdots + c_{jn}E[X_n], \tag{4.10}$$

$$\operatorname{Cov}[Y_j, Y_k] = \sum_{s,t=1}^{n} c_{js}c_{kt} \operatorname{Cov}[X_s, X_t]. \tag{4.11}$$

البرهان حقق اولاً ان

$$\sum_{j=1}^{m} u_j Y_j = \sum_{j=1}^{m} u_j \sum_{t=1}^{n} c_{jt} X_t = \sum_{t=1}^{n} \left\{\sum_{j=1}^{m} u_j c_{jt}\right\} X_t. \tag{4.12}$$

عندما $t = 1, \cdots, n.$ نفرض ان $v_t = \sum_{j=1}^{m} u_j c_{jt}$ من المعادلة 4.12 نحصل على

$$\varphi_{Y_1,\cdots,Y_m}(u_1, \cdots, u_m) = \varphi_{X_1,\cdots,X_n}(v_1, \cdots, v_n). \tag{4.13}$$

اذا اوجدنا قيمة الجهة اليسرى للمعادلة 4.13 وذلك باستخدام المعادلة 4.1 نحصل على النتيجة المطلوبة .

مثال : 4A

باستخدام النظرية 4.A نحصل على ان عملية وينر $\{X(t), t \geq 0\}$. عبارة عن عملية طبيعية وكما تلاحظ ادناه : اذا اعطيت n من النقاط الزمنية $t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$ افرض ان $Y_1 = X(t_1),\ Y_2 = X(t_2) - X(t_1),$
$Y_n = X(t_n) - X(t_{n-1}).$
من الفرضيات السابقة تكون $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ مستقلة وموزعة توزيعا طبيعيا وبذلك ستكون موزعة توزيعا طبيعيا مشتركا . نستطيع ان نكتب $X(t_1) \cdots, X(t_n)$ كترتيب خطي لـ $Y_1, \cdots, Y_n$. اذن $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ موزعة حسب التوزيع الطبيعي المشترك وان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية طبيعية .

نظرية

افرض ان التتابع $\{Z_n\}$ عبارة عن متغيرات عشوائية موزعة حسب التوزيع الطبيعي وان هذه المتغيرات تتقارب في الوسط التربيعي الى المتغير العشوائي Z . اذن Z يكون موزعاً حسب التوزيع الطبيعي .

البرهان :

لكي نثبت ان Z موزع توزيعاً طبيعياً ، نثبت اولا ان دالة خاصية Z يمكن التعبير عنها بدلالة الوسط والتباين وكمايلي :

$$\varphi_Z(u) = \exp\{iuE[Z] - \tfrac{1}{2}u^2 \operatorname{Var}[Z]\}.$$

وهكذا برهن ان Z موزع توزيعاً طبيعياً اذا اثبتنا ان

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(u) = \varphi_Z(u), \tag{4.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} E[Z_n] = E[Z], \ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}[Z_n] = \operatorname{Var}[Z]. \tag{4.15}$$

نحصل من الحقيقة الاتية :

$$\lim_{n\to\infty} E[\,|\,Z_n - Z\,|^2\,] = 0$$

على ان

$$|\,E[Z_n] - E[Z]\,| \leq E[\,|\,Z_n - Z\,|\,] \leq E^{1/2}[\,|\,Z_n - Z\,|^2] \to 0,$$
$$|\,\varphi_{Z_n}(u) - \varphi_Z(u)\,| = |\,E[e^{iuZ_n} - e^{iuZ}]\,| \leq |\,u\,|\,E[\,|\,Z_n - Z\,|] \to 0,$$
$$|\,\sigma[Z_n] - \sigma[Z]\,|^2 \leq \sigma^2[Z_n - Z] = E[\,|\,Z_n - Z\,|^2] + E^2[Z_n - Z] \to 0.$$

عندما تقترب n الى ∞ وهذا هو المطلوب اثباته .

مثال : 4B

افرض $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ عبارة عن عملية طبيعية ثابتة تغايرية ذات وسط يساوي صفراً ودالة تغاير $R(v)$. اذا فرضنا بالامكان اشتقاق $R(v)$ اربع مرات ان $X(t)$ يمكن اشتقاقها مرتين في الوسط التربيعي .

ان لاي t ستكون المتغيرات العشوائية $X(t), X'(t)$ ، $X''(t)$ موزعة توزيعاً طبيعياً مشتركاً بمتوسطات تساوي صفراً ومصفوفة تغاير مبينة أدناه :

$$\begin{bmatrix} E[X^2(t)] & E[X(t)X'(t)] & E[X(t)X''(t)] \\ E[X'(t)X(t)] & E[\{X'(t)\}^2] & E[X'(t)X''(t)] \\ E[X''(t)X(t)] & E[X''(t)X'(t)] & E[\{X''(t)\}^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(0) & 0 & -R^{(2)}(0) \\ 0 & -R^{(2)}(0) & 0 \\ -R^{(2)}(0) & 0 & R^{(4)}(0) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

حيث تمثل مشتقة $R(v)$ رقم k عندما تكون $R^{(k)}(v)$ ، $k = 1, 2, \cdots$

الاساليب غير الخطية للعمليات الطبيعية :

ان للعمليات التصادفية $\{Y(t), t > 0\}$ التي نحصل عليها من العمليات الطبيعية باستخدام الاساليب غير الخطية اهمية خاصة في التطبيقات الجارية على العملية التصادفية للحصول على نتيجة لاخطية . ندرس في هذا الكتاب المشاكل البسيطة المعلقة بالاساليب غير الخطية للعمليات الطبيعية ونقصد بالمشكلة هو ايجاد دالة القيمة الوسطية وقوة تغاير العملية التصادفية $\{Y(t), t \geq 0\}$ الناتجة عن العملية الطبيعية بسبب الوسائل اللاخطية .

نظرية 4C

افرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عملية طبيعية لها متوسط يساوي صفراً وقوة تغاير $K(s,t)$ نكتب في حالة الاعداد غير السالبة مايلي :

$$E[X^2(t)] = K(t,t), \quad (4.17)$$

$$\text{Var}[X^2(t)] = 2K^2(t,t), \quad (4.18)$$

$$\text{Cov}[X^2(s), X^2(t)] = 2K^2(s,t), \quad (4.19)$$

$$E[X(t)X(t+h)] = K(t,t+h), \quad (4.17')$$

$$\text{Var}[X(t)X(t+h)] = K(t,t)K(t+h, t+h) + K^2(t,t+h), \quad (4.18')$$

$$\text{Cov}[X(s)X(s+h), X(t)X(t+h)] = K(s,t)K(s+h, t+h) + K(s,t+h)K(s+h,t). \quad (4.19')$$

البرهان :

مباشر نحقق صحة المعادلتين 4.17 ، '4.17

لكي نبرهن المعادلات 4.18, 4.19, 4.18′, 4.19′ تثبت اولا المعادلة 4.19′ ان

$$\mathrm{Cov}[X(s)X(s+h), X(t)X(t+h)] = E[X(s)X(s+h)X(t)X(t+h)] - E[X(s)X(s+h)]E[X(t)X(t+h)]. \quad (4.20)$$

لاجل تقييم الحد الاول في جهة المعادلة 4.20 اليمنى تستخدم الصيغة العامة الآتية للعزم المضروب الرابع للمتغيرات العشوائية الطبيعية ذات الاوساط التي تساوي صفراً .

$$E[X_1X_2X_3X_4] = E[X_1X_2]E[X_3X_4] + E[X_1X_3]E[X_2X_4] + E[X_1X_4]E[X_2X_3]. \quad (4.21)$$

نبرهن المعادلة 4.21 باستخدام الحقيقة الآتية

$$E[X_1X_2X_3X_4] = \frac{\partial^4}{\partial u_1\,\partial u_2\,\partial u_3\,\partial u_4}\varphi_{X_1,X_2,X_3,X_4}(0,0,0,0). \quad (4.22)$$

Now,

$$\varphi_{X_1,X_2,X_3,X_4}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4} u_iu_jE[X_iX_j]\right\}. \quad (4.23)$$

لتسهيل عمليات الكتابة ، نفرض ان φ تمثل جهة المعادلة 4.23 اليمنى ،ثم عرف

$$L_i = \sum_{j=1}^{4} u_jE[X_iX_j].$$

اذن

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = -\varphi L_1,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_2\,\partial u_1} = \varphi\{L_1L_2 - E[X_1X_2]\},$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial u_3\,\partial u_2\,\partial u_1} = \varphi\{-L_1L_2L_3 + L_3E[X_1X_2] + L_2E[X_1X_3] + L_1E[X_2X_3]\},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4\varphi}{\partial u_4\,\partial u_3\,\partial u_2\,\partial u_1} = \varphi\{&L_1L_2L_3L_4 - L_1L_2E[X_3X_4] - L_1L_3E[X_2X_4]\\ &- L_1L_4E[X_2X_3] - L_2L_3E[X_1X_4]\\ &- L_2L_4E[X_1X_3] - L_3L_4E[X_1X_2]\\ &+ E[X_1X_2]E[X_3X_4] + E[X_1X_3]E[X_2X_4]\\ &+ E[X_1X_4]E[X_2X_3]\}. \quad (4.24)\end{aligned}$$

من المعادلتين 4.22 ، 4.24 نحصل على المعادلة 4.21. .

تتحقق صحة المعادلة 4.21 حتى لوكانت بعض المتغيرات العشوائية . X_1, X_2, X_3, X_4 متطابقة .تفاصيل المعادلة 4.21 موضحة في المكملة 4E .

باستخدام المعادلة 4.21 نحصل على ان جهة المعادلة 4.20 اليمنى تساوي

$$E[X(s)X(t)]E[X(s+h)X(t+h)] + E[X(s)X(t+h)]E[X(s+h)X(t)]$$

وهو المطلوب اثباته في حالة المعادلة .

مثال 4C

نفرض ان $\{X(t), -\infty<t<\infty\}$ عبارة عن عملية طبيعية ثابتة تغايرية لهـــا متوسطات تساوي صفراً ودالة تغاير $R(v)$. ان

$$\{X^2(t), -\infty < t < \infty\}$$

عبارة عن عملية تغاير ثابتةذات دالة قيمه وسطية .

$$m_{X^2}(t) = E[X^2(t)] = R(0) \qquad (4.25)$$

ودالة تغاير :

$$R_{X^2}(v) = \mathrm{Cov}[X^2(t), X^2(t+v)] = 2R^2(v). \qquad (4.26)$$

ان حل اسئلة العمليات الطبيعية يكون اسهل من حل العمليات التصادفية الاخرى. والامثلة على ذلك كثيرة ومنها مشكلة توزيع عدد الاصفار في الفاصلة a الى b للعملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ اومشكلة تحديد توزيع القيم العليا

$$\sup_{a \leq t \leq b} |X(t)|$$

للعملية التصادفية ضمن الفاصلة a الى b تظهر هذه المتاكل بصورة طبيعية في الارسال الاذاعي ، الموجات المضطربة ، الاجهاد ، ودراسات التعويل reliability studies وحتى باستخدام العمليات الطبيعية لهذه المشاكل فانه من الصعوبة بمكان ايجاد حل كامل لها .

يحتاج الشرح المفصل لهذه المشاكل الى رياضيات معقدة تقع خارج نطاق هـذا الكتاب.نوضح في المثال 5B تطبيقات هذه المشاكل فة الاحصاء .

المكملات :

4A نعبر عن دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ذات التوزيع الطبيعي المشترك ولاسباب عديدة بدلالة ارتباطهما ρ_{jk} وتباينهمـــما σ_j^2 وكما يلي :

$$\rho_{jk} = \frac{K_{jk}}{\sigma_j \sigma_k}, \quad \sigma_j^2 = \mathrm{Var}[X_j] = K_{jj}$$

اثبت بدلالة نظير مصفوفة الارتباط ρ

$$\rho^{-1} = \begin{bmatrix} \rho^{11} & \cdots & \rho^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \rho^{n1} & \cdots & \rho^{nn} \end{bmatrix}$$

ان صيغة دالة كثافة الاحتمال المشترك لـ n من المتغيرات العشوائية الطبيعية المشتركة تكون كما يلي :

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n |\rho|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{x_j - m_j}{\sigma_j}\right)\rho^{jk}\left(\frac{x_k - m_k}{\sigma_k}\right)\right\},$$

حيث $|\rho|$ محدودة المصفوفة ρ

4B اثبت في حالة المتغرين العشوائين X_2, X_1 الموزعين توزيعا طبيعيا مشتركا متوسطين يساويان صفراً وتباين σ_1^2 , σ_2^2 على الترتيب ومعامل ارتباط ρ، ان

$$E[e^{i(u_1X_1^2 + u_2X_2^2)}] = (1 - 2i(u_1\sigma_1^2 + u_2\sigma_2^2) - 4u_1u_2(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2)^{-1/2}. \quad (4.27)$$

تلميح : اثبت ثم استخدم الحقيقة الاتية :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2)(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy = (ac-b^2)^{-1/2}.$$

4C اثبت في حالة المتغيرين العشوائيين X_2, X_1 بمتوسطتين يساويان صفر ان

$$\text{Cov}[X_1^2, X_2^2] = 2\{E[X_1X_2]\}^2.$$

4D العزم الرباعي لحاصل ضرب مربعات متغيرات عشوائية طبيعية . اثبت اذا كانت المتغيرات X_1, X_2, X_3, X_4 موزعة توزيعا طبيعيا مشتركا

واذا كانت $U_j = X_j^2 - E[X_j^2], j = 1, \cdots, 4,$ فان

$$\begin{aligned} E[U_1U_2U_3U_4] = {} & 4E^2[X_1X_2]E^2[X_3X_4] + 4E^2[X_1X_3]E^2[X_2X_4] \\ & + 4E^2[X_1X_4]E^2[X_2X_3] \\ & + 16E[X_1X_2]E[X_1X_4]E[X_2X_3]E[X_3X_4] \\ & + 16E[X_1X_2]E[X_1X_3]E[X_2X_4]E[X_3X_4] \\ & + 16E[X_1X_3]E[X_1X_4]E[X_2X_3]E[X_2X_4]. \end{aligned}$$

4E عزوم العمليات الطبيعية العليا. افرض ان $\{X(t), t \in T\}$ عبارة عن عملية طبيعية بدالة قيمة وسطين تساوي صفراً $E[X(t)]$ اثبت عدم وجود جميع الرتب الفردية لعزوم $X(t)$ وان رتب العزوم الزوجية يمكن التعبير عنها بدلالة رتب العزوم الثنائية بالصيغة الاتية :

افرض ان n عدد زوجي صحيح وان $t_1, \cdots, t_n$ عباره عن نقاط عائدة الى T, وان بعضا من هذه النقاط تكون متطابقة ان

$$E[X(t_1) \cdots X(t_n)] = \Sigma E[X(t_{i_1})X(t_{i_2})] \cdots E[X(t_{i_{n-1}})X(t_{i_n})], \quad (4.28)$$

حيث يكون المجموع ضمن جميع ترتيبات تقسيم النقاط n الى $n/2$ زوجياً
ان عدد الحدود الموجودة في المجموع تساوي $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-3)(n-1)$
تلميح : اوجد تفاضل دالة الخاصية . المرجع الدور الاساسي الذي تؤديه المعادلة 4.28 في نظرية الحركة البراونية هوكتاب p. 332, Wang and Uhlenbeck (1945), معادلة 42

4F صنف العمليات الطبيعية المتعلقة بعملية وينر . افرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية طبيعية بمتوسطات تساوي صفراً وقوة تغاير بالشكل الاتي

$$K(s,t) = E[X(s)X(t)] = u(s)v(t) \quad \text{for} \quad s \leq t$$

لبعض الدوال المستمرة $u(\cdot)$ و $v(\cdot)$ اذا كانت النسبة

$$\frac{u(t)}{v(t)} = a(t)$$

مستمرة ومتزايدة بصورة مضطردة وبدالة مقلوبة $a_1(t)$ فان العملية

$$Y(t) = \frac{X(a_1(t))}{v(a_1(t))}$$ عبارة عن عملية

وينر (حيث $\sigma = 1$) . مثال . اذا افترضنا ان $K(s,t) = s(1-t)$ عندما $s < t$ فان :

$$u(s) = s, \ v(t) = 1 - t, \ a_1(t) = t/(t+1), \ Y(t) = (t+1)X(t/\{1+t\}).$$

(مصدر هذه النتائج من كتاب Doob [1949 b])

التمارين :

لكل من العمليات التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ المعرفة في التمارين 4.1 الى 4.5 .

(i) احسب $m(t) = E[X(t)]$,

(ii) احسب $K(s,t) = \text{Cov}[X(s), X(t)]$,

(iii) اذكر $R(v)$ اذا علمت أن العملية تغايرية ثابتة .

(iv) اذكر هل أن العملية طبيعية أم لا .

افرض أن العملية $\{W(t), t \geq 0\}$ في التمارين 4.1 الى 4.3 عبارة عن عملية وينر بالمعلم σ^2 .

$X(t) = (1-t)W(t/\{1-t\})$ اذا كانت $0 < t < 1,$

$= 0$ اذا كانت $t \geq 1$

4.2 $X(t) = e^{-\beta t}W(e^{2\beta t}),$ حيث β كمية موجبة ثابتة

4.3 $X(t) = W^2(t).$

4.4 **العملية ذات الارتباط التام** $X(t) = X,$ حيث X موزعة $N(m,\sigma^2)$

4.5 $X(t) = Y(t+1) - Y(t),$ حيث $\{Y(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية طبيعية ذات
$E[Y(t)] = \alpha + \beta t, \operatorname{Cov}[Y(t), Y(t+v)] = e^{-\lambda|v|}.$

4.6 هات مثالاً يوضح وجود متغيرين عشوائيين X_1 و X_2 لكل منهما توزيع طبيعي مفرد بدون أن يكونا موزعين توزيعاً طبيعياً مشتركا .

تلميح : افرض أن Y_1 , Y_2 مستقلان وموزعان $N(0,1)$. نعرف

$$(X_1,X_2) = (Y_1, |Y_2|) \quad \text{if} \quad Y_1 \geq 0,$$
$$= (Y_1, -|Y_2|) \quad \text{if} \quad Y_1 < 0.$$

4.7 **عملية** *Ornstein-Uhlenbeck*

بالامكان تكوين نماذج للحركة البراونية تعطي مفهوماً أكثر واقعية من عملية وينر. احدى هذه النماذج هو عملية Ornstein-Uhlenbeck (نسبة الى Uhlenbeck ، Ornstein [1930]; راجع Doob [1942]) . يقال أن العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ بانها عملية Ornstein-Uhlenbeck بالمعلمين $0 < \alpha$ ، $0 < \beta$ اذا كانت عملية طبيعية تحقق

$$E[X(t)] = 0, \operatorname{Cov}[X(s), X(t)] = \alpha e^{-\beta|s-t|},$$

عبر عن عملية Ornstein-Uhlenbeck بدلالة عملية وينر وذلك باستخدام المكملة 4F, .

3-5 غاية العمليات التصادفية عبارة عن عمليات طبيعية :

من المعروف أن المتغير العشوائي X الموزع حسب توزيع بواسون بمتوسط λ يوزع بصورة تقريبية حسب التوزيع الطبيعي اذا كانت λ كبيرة . بعبارة ادق افرض أن

$$X^* = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} \tag{5.1}$$

عبارة عن التعبير القياسي لـX (بمعنى ان X^* دالة خطية لـ X لها متوسط يساوي صفراً وتباين يساوي 1) . أن X^* موزع تقريباً حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي صفراً وتباين يساوي 1 أو أن لكل عدد حقيقي u, .

$$\lim_{\lambda \to \infty} \log \varphi_{X^*}(u) = -\tfrac{1}{2}u^2. \tag{5.2}$$

نستخدم المشاهدة الاتية لكي نبرهن المعادلة 5.2 . افرض أن X عبارة عن متغير عشوائي بلوغارتم دالة خاصية لها المفكوك الآتي لكل عدد حقيقي u, .

$$\log \varphi_X(u) = imu - \tfrac{1}{2}u^2\sigma^2 + K\theta \mid u \mid^3, \tag{5.3}$$

حيث $m = E[X]$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X]$, ، K عبارة عن كمية ثابتة موجبة مستقلة عن u وان θ ترمز لكمية تعتمد على u وذات قيمة مطلقة اقل من 1 .

أن للمتغير العشوائي القياس $X^* = (X - m)/\sigma$ لوغارتم دالة خاصية

$$\log \varphi_{X^*}(u) = -\tfrac{1}{2}u^2 + \frac{K}{\sigma^3}\theta \mid u \mid^3. \tag{5.4}$$

تعني المعادلة 5.3 المعادلة 5.4 و ذلك من الحقيقة الآتية :

$$\varphi_{X^*}(u) = \varphi_X\left(\frac{u}{\sigma}\right)e^{-i(m/\sigma)u}.$$

نناقش برهان المتغير العشوائي X الموزع حسب توزيع بواسون بمتوسط λ الذي يكون توزيعه طبيعياً عندما تكون λ كبيرة كما يلي . أن لوغارتم دالة خاصية X كما يلي

$$\log \varphi_X(u) = \lambda(e^{iu} - 1) = iu\lambda - \tfrac{1}{2}u^2\lambda + \lambda\theta \mid u \mid^3. \tag{5.5}$$

اذن تتحقق المعادلة 5.3 عندما $\sigma^2 = \lambda$ ، $K = \lambda$ من المعادلة 5.4

$$\log \varphi_{X^*}(u) = -\tfrac{1}{2}u^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\theta \mid u \mid^3. \tag{5.6}$$

نرى في المعادلة 5.6 ان X^* , $N(0,1)$ تقريبا عندما تكون قيم λ كبيرة.

العمليات التصادفية الطبيعية التقريبية :

يقال ان العملية التصادفية $\{X(t), t \in T\}$ طبيعية تقريباً اذا كان لكل مجموعة منتهية $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ متغيرات عشوائية $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$ موزعة تقريباً توزيعاً طبيعياً مشتركا .بعبارة ادق يقال ان العملية التصادفية $\{X(t), t \in T\}$ بعزوم ثنائية محدودة ولها قانون احتمال يعتمد على معلم ما انها طبيعية بالعزم عندما

يقترب ذلك المعلم الى حد معلوم ، اذا تحقق الشرط الاتي لكل مجموعة منتهية $t_1, t_2, \cdots, t_n$ عائدة الى T : ان دالة الخاصية المشتركة للمتغيرات العشوائية القياسية

$$X^*(t_1), \cdots, X^*(t_n),$$

حيث

$$X^*(t) = \frac{X(t) - E[X(t)]}{\sigma[X(t)]}, \tag{5.7}$$

تحقق (لكل $u_1, \cdots, u_n$) ما يلي : —

$$\log \varphi_{X^*(t_1), X^*(t_2), \ldots, X^*(t_n)}(u_1, u_2, \cdots, u_n) \to -\tfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} u_j \rho(X(t_j), X(t_k)) u_k, \tag{5.8}$$

عندما يقترب المعلم الى الحد المعلوم ، حيث

$$\rho(X(t_j), X(t_k)) = \frac{\text{Cov}[X(t_j), X(t_k)]}{\sigma[X(t_j)]\sigma[X(t_k)]} \tag{5.9}$$

عبارة عن الارتباط بين $X(t_j)$, $X(t_k)$

مثال 5A

عملية وينركنموذج للحركة البراونية :

نرى النموذج الاتي لحركة الجزيئة على طول خط نتيجة للاصطدامات العشوائية الهائلة للجزيئة مع الجزيئات الاخرى . افرض ان الجزيئة عند الوقت صفر – تكون في الموقع صفراً افترض ان الازمنة بين الصدمات المتتابعة عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة موزعة توزيعا اسيا بمتوسط $1/\nu$. نستطيع ان نوضح ان عدد الاصطدامات $N(t)$ في الفاصلة من صفر الى t عبارة عن عملية بواسون بكثافة ν (راجع بند 5-2) . نفترض ان تأثير الاصدام على الجزيئة هو تغيير موقع للجزيئة بمسافة تساوي a او $-a$, باحتمال يساوي $1/2$ في كل اتجاه .

نمثل الموقع $X(t)$ للجزيئة في الزمن t كما يلي :

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, \tag{5.10}$$

حيث Y_n مقدار تغيير الجزيئة نتيجة للاصطدام n . نفترض في المتغيرات العشوائية $\{Y_n\}$ ان تكون مستقلة متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي Y لكي نحصـــل علـــى

$$P[Y = a] = P[Y = -a] = \tfrac{1}{2},$$

حيث a كمية موجبة ثابتة معلومة . يمكن ان نوضح ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن

عملية تصادفية بتزايد مستقل ثابت وبدالة خاصية ذات بعد واحد (راجع عمليات بواسون المركبة في البند 2–4) .

$$\log \varphi_{X(t)}(u) = \nu t\, E[e^{iuY} - 1]. \qquad (5.11)$$

باستخدام المفكوك الاتي نحصل على

$$E[e^{iuY} - 1] = iuE[Y] - \tfrac{1}{2}u^2E[Y^2] + \theta\, |u|^3\, E[|Y|^3]$$
$$= -\tfrac{1}{2}u^2a^2 + \theta\, |u|^3a^3,$$

حيث θ تمثل كمية ما بحيث يكون $|\theta| \leq 1$. اذا عرفنا

$$\sigma^2 = a^2\nu,$$

فان لوغارتم دالة خاصية $X(t)$ يكون كما يلي :

$$\log \varphi_{X(t)}(u) = -\tfrac{1}{2}u^2\sigma^2t + a\theta\, |u|^3\sigma^2t. \qquad (5.12)$$

افترض الآن اقتراب كثافة الصدمات ν الى ∞ وان حجم كل صدمة يقترب الى صفر بطريقة معينة بحيث يكون جاصل ضرب νa^2 يساوي كمية ثابتة (تمثل مجموع مربع متوسط ازاحة الجزيئة في وحدة الزمن) . اذن

$$\log \varphi_{X(t)}(u) \quad \text{tends to} \quad -\tfrac{1}{2}u^2\sigma^2t.$$

وهكذا ستكون $\{X(t), t \geq 0\}$ بصورة تقريبية عبارة عن عملية وينر وذلك لانها موزعة بصورة تقريبية حسب التوزيع الطبيعي بتزايد مستقل ثابت .

مثال : 5B

استخدام العمليات الطبيعية في ايجاد توزيع تقريبي لاختبار جودة توفيق دوال توزيع معينة . اذا علمت بوجود مشاهدة مستقلة $X_1, \cdots, X_n$ بدالة توزيع مستمرة مشتركة محدودة $F(x)$ ، نختبر الآن الفرضية القائلة بان حالة التوزيع المعلومة $F(x)$ تكون صحيحة وذلك بمقارنتها مع دالة توزيع العينة $F_n(x)$. نعرف $F_n(x)$ بانها كسر المشاهدات التي تكون اقل أوتساوي x . يوجد قياسات للانحراف بين $F_n(x)$, $F(x)$ وهما قياس كولموكروف – سمرنوف .

$$D_n = \sqrt{n} \underset{-\infty \leq x < \infty}{\text{supremum}}\, |F_n(x) - F(x)|$$

وقياس كريمر – فون ماسيس Cramér-von Mises

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 \, dF(x).$$

نثبت اذا وضعنا المشاهدات حسب الترتيب التصاعدي $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$، أن

$$\sqrt{n}\, D_n = \max_{j=1,\dots,n} [nF(x_j) - (j-1), j - nF(x_j)],$$
$$W_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^{n} \left[F(x_j) - \frac{2j-1}{2n}\right]^2.$$

لايعتمد توزيع المتغيرات العشوائية D_n, W_n^2 وفقاً لفرضية (العدم) القائلة بان للمشاهدات $X_1, \cdots, X_n$ دالة توزيع $F(x)$ • اذا افترضنا أن $F(x)$ مستمرة لان $F(X_1), \cdots, F(X_n)$ موزعة بصورة منتظمة في الفاصلة صفر الى 1 (راجع كتاب الاحتمالات المتقدمة ص 314) لكي نشتق نظرية التوزيع لـ W_n^2, D_n نفترض أن $F(x)$ عبارة عن التوزيع المنتظم في الفاصلة صفر الى 1 (بحيث $F(x) = x$ عندما $0 \leq x \leq 1$) وان المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, \cdots, X_n$ موزعة بصورة منتظمة في الفاصلة صفر الى 1 نعرف اذا كان $0 \leq t \leq 1$ مايلي :

$$Y_n(t) = \sqrt{n}\,[F_n(t) - t] \tag{5.13}$$

حيث $F_n(t)$ الجزء الكسري للمشاهدات التي تكون اقل أو تساوي t (من بين $X_1, \cdots, X_n$). لكي نمثل $F_n(t)$ بالرموز نعرف مايلي :

$$h_t(x) = 1 \text{ عندما } x \leq t$$
$$= 0 \text{ عندما } x > t.$$

اذن

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \{h_t(X_j) - t\}. \tag{5.14}$$

نحقق ببساطة عندما $j,k = 1, \cdots, n \quad , \quad 0 \leq s$ مايلي

$$
\begin{aligned}
E[h_t(X_j)] &= t, \qquad (5.15)\\
E[h_s(X_j)h_t(X_k)] &= \min(s,t) && \text{اذا كان } j=k\\
&= st && \text{اذا كان } j \neq k,\\
\operatorname{Cov}[h_s(X_j),\, h_t(X_k)] &= \min(s,t) - st && \text{اذا كان } j=k\\
&= 0 && \text{اذا كان } j \neq k.
\end{aligned}
$$

اذن $E[Y_n(t)] = 0,$ وان

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[Y_n(s),\, Y_n(t)] &= \frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n} \operatorname{Cov}[h_s(X_j),\, h_t(X_k)] \qquad (5.16)\\
&= \min(s,t) - st\\
&= s(1-t) \quad \text{if} \quad s \leq t.
\end{aligned}
$$

نفترض أن $\{W(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية وينر ، نعرف عملية تصادفية جديدة $\{Y(t), 0 \leq t \leq 1\}$ بالمعادلة الآتية :

$$
Y(t) = (1-t)W\left(\frac{t}{1-t}\right). \qquad (5.17)
$$

أن $Y(t)$ طبيعي وان $Y(0) = 0, E[Y(t)] = 0,$ **وأن**

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[Y(s),\, Y(t)] &= (1-s)(1-t) \operatorname{Cov}\left[W\left(\frac{s}{1-s}\right), W\left(\frac{t}{1-t}\right)\right] \qquad (5.18)\\
&= (1-s)(1-t)\min\left(\frac{s}{1-s}, \frac{t}{1-t}\right)\\
&= s(1-t) \quad \text{if} \quad s \leq t.
\end{aligned}
$$

عند مقارنة المعادلتين 5.16 5.18 فاننا نلاحظ ان لكل n تكون للعملية التصادفية دالة قيمة وسطية وقوة ارتباط مثلما يكون للعملية الطبيعية $Y_n(t)$ والتي بالضرورة تكون عبارة عن عملية وينرسوى الفرق في مقياس الزمن.ان الميزة الوحيدة بين $Y_n(t)$ ، $Y(t)$ هي ان $Y_n(t)$ ليست عملية طبيعية ، ومع ذلك فان لكل n تعرف $Y_n(t)$ بانها مجموع المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة التوزيع وذات التباينات المحدودة وباستخدام نظرية الحد المركزية نحصل على ان $Y_n(t)$ عبارة عن عملية طبيعية بصورة تقريبية عندما تقترب n الى ∞ اي ان لكل عدد صحيح k اعداد $t_1, \cdots, t_k,$ وللاعداد الحقيقية $u_1, \cdots, u_k$

$$
\begin{aligned}
\underset{n\to\infty}{\text{غا}}\ \varphi_{Y_n(t_1),\ldots,Y_n(t_k)}(u_1, \cdots, u_k) &= \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} u_i u_j\,[\min(t_i,t_j) - t_i t_j]\right\}\\
&= \varphi_{Y(t_1),\ldots,Y(t_k)}(u_1, \cdots, u_k). \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

ان توزيع احتمال كولموكروف – سمرنوف

$$D_n = \max_{0 \le t \le 1} | Y_n(t) |$$

يقترب الى التوزيع الاحتمالي

$$D = \max_{0 \le t \le 1} | Y(t) | ,$$

عندما تقترب n الى ∞

ان توزيع احتمال كرامير الاحصائي

$$W_n^2 = \int_0^1 Y_n^2(t)\, dt$$

يقترب الى التوزيع الاحتمالي .

$$W^2 = \int_0^1 Y^2(t)\, dt.$$

تقترب n الى ∞

نستطيع ان نبرهن صحة هذه الصيغ راجع (Donsker [1950]) .وهكذا نستطيع ان نجد توزيع D_n ، W_n التقريبي لجودة التوفيق الاحصائي وذلك بايجـاد توزيع احتمالي D ، W وهما عبارة عن دالتين معرفتين للعملية الطبيعية $Y(t)$ ذات العلاقة بعملية وينر .

تقع مشكلة ايجاد التوزيعات المعرفة للعمليات التصادفية خارج نطاق هـذا (راجع المصادر الاتية فيما يخص المشكلة السابقة)

Kac [1951] and Anderson and Darling [1952]).

المراجع التي تخص اختبارات كولمكروف – سرنوف وكرامير مبينه ادناه .

Barnard (1953) and Maguire, Pearson, and Wynn (1953).

التمارين :

5.1 نفترض للمتغيرالعشوائي S_n دالة الخاصية الاتية :

$$\varphi_{S_n}(u) = (pe^{iu} + q)^n,$$

حيث $0 < p < 1, q = 1 - p$ وان n عدد صحيح .

افترض ان

$$(S_n)^* = \frac{S_n - E[S_n]}{\sigma[S_n]}.$$

أ) اوجد المتوسط ، التباين ، العزم المركزي الثلاثي ، العزم المركزي الرباعي لـ S_n ، $(S_n)^*$ ب) – اثبت ان .

$$\lim_{n\to\infty} \log \varphi_{(S_n)^*}(u) = -(\tfrac{1}{2})u^2.$$

5.2 نفترض ان للمتغيرين العشوائيين S_n ، T_n دالة الخاصية المشتركة الاتيــة :

$$\varphi_{S_n,T_n}(u,v) = \{q_1q_2 + p_1e^{iu} + p_2e^{iv} + p_1p_2e^{i(u+v)}\}^n,$$

حيث

$0 < p_1 < 1, 0 < p_2 < 1, q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2, n$ n عدد صحيح

نفترض ان $(S_n)^* = \dfrac{S_n - E[S_n]}{\sigma[S_n]}, (T_n)^* = \dfrac{T_n - E[T_n]}{\sigma[T_n]}.$

اوجد قيمة $\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} \log \varphi_{(S_n)^*,(T_n)^*}(u,v).$

5.3 اثبت ان عملية بواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ بكثافة ν موزعة بالتقارب حسب التوزيع الطبيعي عندما تقترب ν الى ∞ .

5.4 نفرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية بتزايد مستقل ثابت .نفترض ان $X(0) = 0$ وان

$$\log \varphi_{X(t)}(u) = \nu t \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)f(x)\, dx,$$

حيث $\nu > 0$ $f(x)$ دالةكثافة الاحتمال .نفرض ان

$$\beta = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 f(x)\, dx \Big/ \left\{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx\right\}^{3/2}.$$

5.5 نفرض ان $\{X_n\}$ عبارةعن تتابع من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع بمتوسطات تساوي صفراً وتباينات تساوي 1 .

اثبت لكي تكون $\{X(t), t \geq 0\}$ طبيعية بالتقارب المتماثل فان اي من هذه الشروط يكون لازم .

(i) $\nu \to \infty$;
(ii) $\beta \to 0$;
(iii) $\beta^2/\nu \to 0$.

نفرض ان $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ عبارث عن تتابع للمجموعات المتاليــة . نعرف العملية التصادفية $\{Y_n(t), 0 \le t \le 1\}$ عندما $n = 1, 2, \cdots$ كمايلي

$Y_n(0) = 0$ وفي حالة $0 < t \le 1$ فان $Y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_k$ اذا كانت $\frac{k-1}{n} < t \le \frac{k}{n}$.

من جانب اخر، نكتب مايلي عندما $t > 0$

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[tn]}$$

حيث $[tn]$ تمثل اكبر عدد صحيح يساوي tn او اقل اثبت عندما تقترب n الى ∞ $\{Y_n(t), 0 \le t \le 1\}$ طبيعية بالتقارب المتماثل وانها فــي الحقيقة عبارة عن عملية وينر تقريبا .

التحليل التوافقي للعمليات التصادفية

يؤدي طيف العملية التصادفية spectrum دوراً مهما في نظريتـي تحليـــل التسلسلات الزمنية والاتصالات الاحصائية . يمثل الطيف من وجهة نظر محلل السلاسل الزمنية اداة اساسية لتحديد ميكانيكية توليد سلاسل زمنية مشاهدة يعطي الطيف لنظر ية الاتصالات مفهوماً رئيسياً حيث بدلالته نستطيع دراسة سلوك العمليات التصادفيـــة (الممثلة للاشارة اوالضوضاء) المارة خلال وسائل خطية(اولاخطية الى حد ما) . نوضح مفهوم المرشح *filter* (او بعبارة ادق المرشح الخطي للزمن غير المتغير) لاجل دراسة مفهوم الطيف . يؤدي هذا المفهوم الان دوراً مهماً في كثير من المجالات العملية بعد تطويره الى حد بعيد من قبل المهندسين الالكترونين .

تأمل « صندوق اسود » "black box" يستجيب لدالة الداخل $\{x(t), -\infty < t < \infty\}$ وذلك بانتاج دالة خارج $\{y(t), -\infty < t < \infty\}$

يطلق على « الصندوق الاسود » بانه ذوزمن غيرمتغير اذا كانت له ميزة تغير دالة الداخل بكمية مقدارها τ ودالة الخارج بكمية مقدارها τ نوضح ذلك بالرموز عندما تستجيب $\{y(t), -\infty < t < \infty\}$ الى $\{x(t), -\infty < t < \infty\}$

فان $\{y(t+\tau), -\infty < t < \infty\}$ تستجيب الى $\{x(t+\tau), -\infty < t < \infty\}$.

يقال أن «الصندوق الاسود» عبارة عن مرشح خطى اذا كان لدالة الداخل

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \quad (6.1)$$

التي عبارة عن ترتيب خطي لدالتين $x_1(t)$, $x_2(t)$ وهما دالة استجابة $y_1(t)$, $y_2(t)$ على الترتيب دالة الاستجابة الآتية :

$$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t). \quad (6.2)$$

الخلاصة . يطلق على أية عملية أواجراء (يكون حسابا فيزيائياً أوغير ذلك) بالمرشح الخطي الزمني غير المتغير اذا استطعنا اعتباره تحويل الداخل الى خارج ويحقق الشرطين الآتيين :

(i) الكمية الخارجة المناظرة الى كمية متكون من تركيب كميتين داخلتين عبارة عن تركيب الكميتين الخارجتين المناظرتين .

(ii) التأثير الوحيد لتأخيرزمن الداخل بكمية ثابتة هوتأخيرالخارج بنفس الزمن .

امثلة للمرشحات الخطية ذات الزمن غير المتغير (حيث تمثل $y(\cdot)$ الدالة الخارجة الدالة الداخلة $x(\cdot)$] هي .

(i) الترتيب الخطي المتحرك مثل

$$y(t) = a_0x(t) + a_1x(t-1) + \cdots + a_hx(t-h),$$
$$y(t) = x(t-h),$$
$$y(t) = x(t) - x(t-1);$$

(ii) ترتيب المشتقات مثل

$$y(t) = a_0x(t) + a_1x'(t) + \cdots + a_nx^{(n)}(t),$$
$$y(t) = x'(t);$$

(iii) تكامل المقادير مثل

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}x(s)\,ds, \quad (6.3)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t-s)x(s)\,ds = \int_{0}^{\infty} w(s)x(t-s)\,ds. \quad (6.4)$$

يطلق على الدالة $w(u)$ بدالة استجابة ضربة المرشح implies في كل حالة نستخدم فيها مرشحاً لتكامل المقادير يجب ان نذكر الشروط الرياضية $w(u)$ من اجل جعل الحسابات الرياضية معقولة .

هناك عدة طرق مختلفة لوصف المرشح الخطي للزمن غير المتغير! وفي هذه الطرق اعطاء صيغة واضحة للدالة الخارجة المناظرة لاية دالة داخلة من هذه الامثلة هي

(i) أو (iii) . توجد طريقة اخرى اكفأ في وصف المرشحات الخطية للزمن غير المتغير وذلك بدلالة الاستجابة الترددية *frequency response.* . يطلق على الدالة ذات الشكل

$$x(t) = Ae^{i\omega t} \qquad (6.5)$$

بالتوافقية المعقدة Complex harmoms بسعة A وتردد ω . يطلق على الدالتين

$$x(t) = A \cos \omega t \quad \text{and} \quad x(t) = A \sin \omega t \qquad (6.6)$$

بالدالتين التوافقيتين الحقيقيتين بسعة A وتردد w، بما ان $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ اذن توجد علاقة وثيقة بين الدالة التوافقية غير الحقيقية في المعادلة 6.5 والتوافقية الحقيقية في المعادلة 6.6

نظرية 6A

اذا تم تطبيق توافقيه غير حقيقية بسعة تساوي واحداً وتردد ω للمرشح الخطي للزمن غير المتغير فان الخارج المناظر (افترض وجوده) سيكون توافقيا غير حقيقي بسعة A وتردد ω تعتمد السعة A على ω ولذلك يمكن ان تكتب كما يلي : $A(\omega)$.

البرهان

افرض ان $y(t)$ عبارة عن الخارج المناظر الى $x(t) = e^{i\omega t}$ ان للداخل $x(t+\tau)$ دالةخارجة $y(t+\tau)$ حيث يتم تغيير الزمن t بمقدار τ . ان الدالة الداخلة ستكون كما يلي :

$$x(t+\tau) = e^{i\omega(t+\tau)} = e^{i\omega\tau}x(t)$$

ان $x(t+\tau)$ عبارة عن كمية ثابتة مضروبة بالداخل الاصلي . اذن

$$y(t+\tau) = e^{i\omega\tau}y(t). \qquad (6.7)$$

من تحقيق صحة المعادلة 6.7 لجميع قيم τ t نحصل على (ضع $t = 0$

$$y(\tau) = e^{i\omega\tau}y(0). \qquad (6.8)$$

اذا عرفنا $A(\omega) = y(0)$ سنحصل على ان دالة الخارج $y(t)$ توافقية غير معقدة بسعة $A(\omega)$ وتردد ω وهو المطلوب اثباته .

ذا علمنا ان لزمن المرشح الخطّي غير المتغير دالة خارج $y(t)$ لكل استجابة للتوافقية غير الحقيقية ذات سعة واحدة وتردد ω المطبقة بالمرشح لفترة غير محدودة من الزمن ، فاننا نعرف دالة الاستجابة لتردد المر شح لتكون الدالة $A(\omega)$ التي لها الكمية $A(\omega)$ للتردد ω

وتحقق العلاقة

$$y(t) = A(\omega)e^{i\omega t} \tag{6.9}$$

مثال 6A

تعطي دالة اسْتجابة تردد $A(\omega)$ للمرشح الخطي للزمن غير المتغير الموصوفة في المجال الزمني بواسطة $y(t) = x'(t)$

بالصيغة الاتية :

$$A(\omega) = i\omega, \tag{6.10}$$

لانه من الداخل $x(t) = e^{i\omega t}$ نحصل على الخارج

$$y(t) = x'(t) = i\omega e^{i\omega t} = A(\omega)x(t). \tag{6.11}$$

تعطي دالة استجابة تردد $A(\omega)$ المرشح الخطي للزمن غير المتغير المعرفة بالمعادلة كما يلي :

$$A(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega u}e^{-\beta u}\,du = \frac{1}{\beta + i\omega}, \tag{6.12}$$

لانه من الداخل $x(t) = e^{i\omega t}$ نحصل على

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}e^{i\omega s}\,ds = e^{i\omega t}\int_0^\infty e^{-\beta u}e^{-i\omega u}\,du.$$

تحويل فورير للمرشح المعرف بالمعادلة 6.4, هو :

$$A(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega s}w(s)\,ds \tag{6.13}$$

عبارة عن دالة استجابة تردد المرشح في حالة الدالة الداخلة التوافقية $x(t) = e^{i\omega t}$ ومنها نحصل على الخارج التوفقي $y(t) = e^{i\omega t}A(\omega)$

السؤال المطروح : لماذا دالة استجابة التردد عبارة عن الدالة الاكثر اهمية في وصف المرشح ؟ .

للاجابة على هذا السؤال ، نتأمل مرشح تكامل المقدار في المعادلة 6.4 لكي نبسط العمليات الحسابية نعرف $w(s)$ عندما $s<0$ كما يلي :

$$w(s) = 0 \tag{6.14}$$

ونكتب كذلك

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(s)x(t-s)\, ds. \tag{6.15}$$

نعرف تحويلات فورير للدوال الداخلة والخارجة :

$$A_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}x(t)\, dt, \tag{6.16}$$

$$A_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}y(t)\, dt. \tag{6.17}$$

نهمل في الوقت الحاضر الاسئلة الدقيقة حول الموضوع ونفترض وجود قيم محدودة للتكاملات في المعادلتين 6.16 6.17 بعد اتخاذ تحويل فورير لطرفي المعادلة 6.15 نحصل على

$$\begin{aligned}
A_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, w(s)x(t-s) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ds\, w(s)e^{-i\omega s}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega(t-s)}x(t-s) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ds\, w(s)e^{-i\omega s}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{-i\omega t'}x(t') \\
&= A(\omega)A_x(\omega).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

بعبارة اخرى ، نستطيع ان نوضح المعادلات 6.18 كمايلي :

[تحويل فورير للداخل] [حالة استجابة تردد المرشح] = تحويل فورير للخارج •

وهكذا نرى ان للدواخل التي لها تحويلات فورير وتنتج خوارج لها تحويلات فورير نستطيع ان نعبر تأثير العملية الترشيحية عليها بالمعادلة 6.19 لكي نفهم معنى المعادلة 6.19 تأمل الدالة الداخلة $x(t)$ والتي يمكن اعتبارها مجموع دالتين زمنيتين

حيث تمثل $s(t)$ «الاشارة » بينما تمثل $n(t)$ الضوضاء (او الجزء غير المرغوب فيه من السجل $x(t)$) . اذن نرغب بوجود مرشح تمر من خلاله اكبر كمية ممكنة من دالة الاشارة الزمنية $s(t)$ ويسمح بمرور اقل مايمكن من دالة الضوضاء الزمنية $n(t)$.

$$x(t) = s(t) + n(t), \tag{6.20}$$

اذا كان تحويل فورير $A_s(\omega)$ للاشارة لايساوي صفر عند ترددات يكون فيها تحويل فورير « للضوضاء » صغيراً ، فاننا نتمكن من صياغة مرشح وذلك باختيار دالة استجابةتردد له $A(\omega)$ تكون قريبة ان امكن الى القيمة واحد عند ترددات ω حيث $A_s(\omega)$ لاتكون قريبة من الصفر وتكون قريبة من الصفر للترددات الباقية .

واخيراً نتوصل الى علاقة الاعتبارات السابقة بنظرية العمليات التصادفية يعتبر الداخل في كثير من الشبكات الكهربائية والانظمة الميكانيكية عبارة عن عمليةتصادفيـة . مثلا اذا اردناتصميم قذيفة موجهة بنجاح ، يجب ان نصف الظروف التي تحيط بالقذيفة

خلال الانطلاق على شكل عملية تصادفية ويعالج بعد ذلك مسار القذيفة على شكـل استجابة لنظام ميكانيكي خطي لدواخل عشوائية .
هل نستطيع تعريف تحويل فورير للعملية التصادفية$\{X(t), -\infty < t < \infty\}$بالشكل الآتي

$$A_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} X(t)\, dt. \tag{6.21}$$

لايوجد معنى للتكامل في المعادلة 6.21 لكثير من العمليات التصادفية مثل عمليات التغاير الثابتة ،لان دوال العينة لتلك العمليات عبارة عن دوال ليست بالدورية المجدية لذلك فانها لاتعود الى صنف دوال المعتبرة في نظريات متواليات فورير وتكاملات فورير العادية .لكن مع ذلك من الممكن تعريف مفهوم التحليل التوافقي للعمليات التصادفية التي اثبتها في البداية Wiener سنة (1930) Khintchine سنة (1934)
(اي انها عبارة عن وسيلة تعيين مقياس لكمية الاضافة المساهمة «لمحتويات »لعملية لكل تردد) .
الاقتباس الاتي من وينر (1930, p.126) والذي يبين قوة هذا التوسيع في مفهوم التحليل التوافقي .

الاقتباس :

لاتشتمل نظريتا التحليل التوافقي الموجودة في متواليات فورير الكلاسيكيةالمتطورة ونظرية Plancherel (تطوير تكامل فورير)على جميع امكانيات التحليـــل التوافقي .تمثل متواليات فورير صنفاً خاصاً من الدوال الدورية ، بينما تمثل نظريـــة Plancherel (تكامل فورير) دوال تربيعية المجموع ومن هنا سنقترب في المتوسط

الى صفر عندما يقترب عاملها الى ∞ .وانها لاتكون مناسبة لمعالجة شعاع من الضوء الابيض الذي يفترض ان يستمر لوقت غير محدود .ومع ذلك فان المشكلة التي واجهت الفيزيائيين الأوائل في تحليل الضوء الابيض الى مركباته اوجبت عليهم استخدام احدى هذه الوسائل .مثل Gouy الضوء الابيض بمتوالية فورير حيث جعل دورتها تصل الى حد ∞ لالا نهاية وقد توصل الى نتائج مطابقة للتجارب ذلك باهتمامه بقيم اوساط الطاقة المتعلقة .

توصل Lord Rayleigh, من جانب اخر الى نفس النتائج تقريبا باستخدام تكامل فورير وهذا ما نسميه الآن بنظرية Plancherel . في كلا الحالتين ، نقدر مهارة المؤلفين في استخدام وسائل غير ملائمة في الحصول على النتائج الصحيحة وهذا يؤدي الى تقدير النظرة الفيزيائية للموضوع

يقع عرض نظرية التحليل التوافقي للعمليات التصادفية خارج نطاق هذا الكتاب لانها تعود لمنهج تحليل السلاسل الزمنية او نظرية الاتصالات الاحصائية .على كل حال دعنا نذكر بدون برهان اهمية هذه النظرية .كثير من الناس يجدون استخدام التكامل اسهل من حساب المجموعات لذلك (حالة السلاسل الزمنية المستمرة المعلم)

نعرف الدالتين الاتيتين اذا اعطينا عينة محدودة $\{X(t), 0 \le t \le T\}$ للعملية :

الدالة الاولى : دالة تغاير العينة :

$$\begin{aligned} R_T(v) &= \frac{1}{T}\int_0^{T-v} X(t)\,X(t+v)\,dt, & 0 \le v < T \qquad (6.22)\\ &= 0, & v > T \\ &= R_T(-v), & v < 0 \end{aligned}$$

والدالة الثانية : دالة كثافة طيف العينة

$$f_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T e^{-it\omega} X(t)\,dt\right|^2, \quad -\infty < \omega < \infty. \qquad (6.23)$$

(باستخدام نظرية تكامل فورير) نثبت ان $R_T(v)$ ، $f_T(\omega)$ احدهما عبارة عن تحويل فورير للاخر :

$$R_T(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv\omega} f_T(\omega)\, d\omega, \quad -\infty < v < \infty, \tag{6.24}$$

$$f_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-iv\omega} R_T(v)\, dv = \frac{1}{\pi} \int_0^T \cos v\omega\, R_T(v)\, dv. \tag{6.25}$$

من المعادلة 6.24 يتبين أن متوسط دالة تغاير العينة عبارة عن تحويل فورير لمتوسط دالة كثافة طيف العينة :

$$E[R_T(v)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv\omega} E[f_T(\omega)]\, d\omega, \quad -\infty < v < \infty. \tag{6.26}$$

افرض الان وجود دالة مستمرة $R(v)$ بحيث

$$\underset{T\to\infty}{\text{غــ}}\; E[R_T(v)] = R(v). \tag{6.27}$$

تتحقق صحة المعادلة 6.27 في حالة العملية التصادفية الثابتة التغاير وبمتوسط يساوي صفراً حيث في تلك الحالة تساوي $R(v)$ دالة تغاير العملية لانه (عندما $0 < v < T$)

$$E[R_T(v)] = \frac{1}{T} \int_0^{T-v} R(v)\, dt = \left(1 - \frac{v}{T}\right) R(v).$$

اذا تحققت صحة المعادلة 6.27 فاننا نتمكن من اثبات وجود دالة محددة غير تنازلية لمتغيرحقيقي ω ويرمز لتلك الدالة بالرمز $R(v)$ ويطلق عليها اسم دالة توزيع الطيــف *spectral distribution function* (استخدم نظرية الاستمرارية في نظرية الاحتمال، الاحتمالات المتقدمة ص425) بحيث :

$$R(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv\omega}\, dF(\omega), \quad -\infty < v < \infty. \tag{6.28}$$

يمكن توضيح $F(\omega_2) - F(\omega_1)$ لاي ترددين $\omega_1 < \omega_2$, على انها مقياس لسعة تردد ω_1 الى ω_2 الى «محتوى» العملية التصادفية .

نفترض الآن أن دالة توزيع الطيف $F(\omega)$ يمكن تفاضلها في أية نقطة . يرمــز لمشتقتها بالرمز $F(\omega)$ ويطلق عليها اسم دالة كثافة الطيف للعملية التصادفية . اذن بدلاً من المعادلة 6.28 نحصل على المعادلة

$$R(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv\omega} f(\omega)\, d\omega \tag{6.29}$$

الشرط اللازم لتفاضل $F(\omega)$ ولتحقيق صحة المعادلة 6.29 هو ان يكون

$$\int_{-\infty}^{\infty} | R(v) | \, dv < \infty. \tag{6.30}$$

الصيغة الواضحة لدالة كثافة الطيف تكون كما يلي : —

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv\omega} R(v) \, dv. \tag{6.31}$$

المعادلتان 6.29 ، 6.31 تعتبران علاقتين اساسيتين في نظرية التحليل التوافقي للعمليات التصادفية وانهما يكونان مانسميه بعلاقته *Khintchine relations* نسبة الـى الاعمال التي قام بها *Wiener* سنة (1930) Khintchine سنة (1934)

تأتي اهمية دالة كثافة الطيف من خلال سهولة التعبير بدلالتها عن استجابة الانظمة الخطية للتأثيرات العشوائية . من الممكن برهنة العلاقة الاتية :

[دالة كثافة طيف العملية] = [دالة استجابة] = [دالة كثافة طيف
(6.32) [التصادفية الخارجة] [تردد المرشح] × [العملية التصادفية الداخلة]

من العلاقة اعلاه ، يمكننا تحديد تأثيرات المرشح على الشبكات المختلفة التي تمر من خلالها العملية التصادفية .

اضافة الى ذلك . اذا اعتبرنا العملية $X(\cdot)$ بانها مجموع $X(t) = S(t) + N(t)$ عمليتين $S(\cdot)$ ، $N(\cdot)$ تمثلان الاشارة والضوضاء على الترتيب ، فانه من معرفة وان كثافة طيف الاشارة والضوضاء نتمكن من تطوير نظام لفصل الاشارة عن الضوضـــاء .

يمكن فهم كثير من جوانب السلاسل الزمنية الثابتة التغيير بصورة جيدة بدلالة دالة كثافة طيفها . تمكننا دالة كثافة الطيف من استقصاء الميكانيكية الفيزيائية المولدة للسلاسل الزمنية وامكانية تمثيل السلاسل الزمنية . استخدامات الطيف الاخرى هي (i) كوسائل عملية للارسال او اكتشاف الاشارات (ii) كوسائل عملية لتبويب سجلات الظواهر مثل موجات الدماغ (iii) كوسائل لدراسة البث الاذاعي ، (iv) كوسائل لتحديد خصائص انظمة السيطرة تكمن اهمية نظرية تحليل الطيف الاحصائي في تقدير دالة

كثافة طيف السلسلة الزمنية التي لها سلسلة ذات طول محدود . للحصول على المراجع الخاصة بهذه النظرية ، راجع Parzen (1961 a). Jenkins (1961)

مثال 6B

حركة البندول في الموانع المضطربة :

ان معادلة حركة البندول تكون كما يلي :

$$X''(t) + 2\alpha X'(t) + (\omega_0^2 + \alpha^2)X(t) = I(t) \tag{6.33}$$

حيث $X(t)$ عبارة عن ازاحة البندول من موقع السكون ، α عبارة عن عامل التضاؤل . عبارة عن زمن تضاؤل ذبذبة البندول ، $2\pi/\omega_0$ عبارة عن قوة الجهد في وحدة كتلة البندول . اذا استمرت حركة البندول لمدة طويلة فانه يمكن ان نثبت ان $X(t)$ عبارة عن ناتج المرشح (نوع عامل التكامل) الموصوف كما يلي :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \frac{\sin \omega_0(t-s)}{\omega_0} I(s)\, ds. \tag{6.34}$$

باستخدام النظرية 3A . ومن المعادلة 6.34 نحصل على :

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \frac{\sin \omega_0(t-s)}{\omega_0} E[I(s)]\, ds,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}[X(u), X(v)] = \int_{-\infty}^{u} ds \int_{-\infty}^{v} dt\, e^{-\alpha(u-s)} e^{-\alpha(v-t)} \\ \times \frac{\sin \omega_0(u-s)}{\omega_0} \frac{\sin \omega_0(v-t)}{\omega_0} \operatorname{Cov}[I(s), I(t)].\end{aligned} \tag{6.35}$$

نفترض الآن أن الكمية الداخلة $\{I(t), -\infty < t < \infty\}$ عبارة عن ثابت تغايري بدالة تغاير $R_I(\cdot)$ وان لها دالة كثافة طيف $f_I(\cdot)$: بالتكافؤ . نفترض ان قوة تغاير $I(\cdot)$ يمكن ان نكتب كتكامل فورير

$$\operatorname{Cov}[I(s), I(t)] = R_I(s-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(s-t)} f_I(\omega)\, d\omega. \tag{6.36}$$

بعد تعويض المعادلة 6.36 في المعادلة 6.35 نكتب مايلي

$$\mathrm{Cov}[X(u), X(v)] = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, f_I(\omega) \int_{-\infty}^{u} ds\, e^{is\omega} e^{-\alpha(u-s)} \frac{\sin \omega_0(u-s)}{\omega_0}$$
$$\times \int_{-\infty}^{v} dt\, e^{-it\omega} e^{-\alpha(v-t)} \frac{\sin \omega_0(v-t)}{\omega_0}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, f_I(\omega) e^{i\omega(u-v)} \left| \int_0^{\infty} dx\, e^{ix\omega} e^{-\alpha x} \frac{\sin \omega_0 x}{\omega_0} \right|^2$$

وهكذا نرى انه بالامكان كتابة قوة تغاير $X(t)$ كتكامل فورير

$$\mathrm{Cov}[X(u), X(v)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(u-v)} f_X(\omega)\, d\omega,$$

حيث

$$f_X(\omega) = f_I(\omega) \mid A(\omega) \mid^2, \tag{6.37}$$
$$A(\omega) = \int_0^{\infty} dx\, e^{ix\omega} e^{-\alpha x} \frac{\sin \omega_0 x}{\omega_0}. \tag{6.38}$$

ان $A(\omega)$ عبارة عن دالة استجابة التردد لزمن المرشح الخطي غير المتغير الذي يرتبط ناتجها $X(t)$ بكميتها الداخلة $I(t)$ المعادلة التفاضلية 6.33 . تعطينا المعادلة 6.37 مثال لشرعية المعادلة 6.32 .

لاجل تقييم التكامل في المعادلة 6.38 نبدأ كما يلي
اذا كانت الكمية الداخلة

$$I(t) = e^{i\omega t}$$

فان للنظام الخطي الموصوف بمعادلة التفاضل 6.33 كمية خارجة

$$X(t) = A(\omega) e^{i\omega t}, \; A(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-\alpha x} \frac{\sin \omega_0 x}{\omega_0}\, dx,$$

بالمشتقات الاتية :

$$X'(t) = (i\omega) X(t), \; X''(t) = (i\omega)^2 X(t).$$

بعد تعويض هذه التعابير في المعادلة 6.33 نحصل على المعادلة الاتية لدالة استجابة التردد $A(\omega)$:

$$\{(i\omega)^2 + 2\alpha(i\omega) + (\omega_0^2 + \alpha^2)\} e^{i\omega t} A(\omega) = e^{i\omega t},$$

بحيث

$$A(\omega) = \frac{1}{\{(i\omega)^2 + 2\alpha(i\omega) + (\omega_0^2 + \alpha^2)\}}.$$

نوضح مربع مطلق دالة استجابة التردد كما يلي :

$$| A(\omega) |^2 = \frac{1}{(\omega_0{}^2 + \alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} . \qquad (6.39)$$

نتيجة لذلك ، اذا كانت الكمية الداخلة $\{I(t), -\infty < t < \infty\}$ في معادلة التفاضل التصادفية 6.33 هي ثابتة تغايرية ذات كثافة طيف $f_I(\omega)$, فان العملية التصادفية هي ايضاً ثابتة تغايرية بدالة كثافة طيف $f_X(\omega)$ تعطى بالمعادلة 6.37 حيث $| A(\omega) |^2$ تعطى بالمعادلة 6.39

ضوضاء الضوء الابيض : White noise

بالمقارنة مع توزيع طاقة الضوء الابيض المستمر من جسم متوهج فان العملية التصادفية الثابتة التغايرية التي لها قوة متساوية عند جميع فترات التردد ضمن مدى ترددي واسع تسمى بضوضاء الضوء الابيض . نعبر عن ذلك رياضياً كما يلي : يقال ان العملية $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ عبارة عن ضوضاء الضوء الابيض اذا كان لها دالة كثافة طيف عبارة عن كمية ثابتة : لبعض قيم $C > 0$

$$f_X(\omega) = C \text{ لجميع قيم } \omega \qquad (6.40)$$

من الطبيعي ان تكون دالة كثافة الطيف ثابتة غير تكاملية ولذلك فان هذا الافتراض يخالف الواقع من الناحية الرياضية . توجد عدة طرق لاعطاء تعريف رياضي دقيق لضوضاء الضوء الابيض .

في معظم المتطلبات تعتبر ضوضاء الضوء الابيض عبارة عن عملية بواسون بدالة تغاير .

$$R(t) = e^{-\rho|t|} \qquad (6.41)$$

ودالة كثافة طيف

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (\omega/\rho)^2} \qquad (6.42)$$

حيث ρ كمية كبيرة يمكن اعتبارها تصل الى ما لانهاية . ان دالة كثافة طيف المعادلة 6.42 عبارة عن كمية ثابتة (وان دالة التغاير في المعادلة 6.41 عبارة عن دالة دلتا دارك Dirac delta) .

مثال 6C

نظرية التنبؤات وتمثل العملية الثابتة كنتيجة خارجة من المرشح لضوضاء الضوء الأبيض الداخلة :

نفرض ان $X(t)$ عبارة عن عملية ثابتة لها متوسطات تساوي صفراً ودالة تغاير $R(v)$ هل يوجد دائما مرشح بدالة استجابة الدافع $w(s)$ بحيث

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t-s) I(s)\, ds, \qquad (6.43)$$

حيث ان الكمية الداخلة $I(s)$ عبارة عن ضوضاء الضوء الابيض ؟
الشرط الضروري لتحقيق صحة المعادلة 6.43 هوان تحقق دالة التغاير $X(t)$ لكمية ثابتة C ومربع دالة تكاملية $w(s)$,

$$E[X(u)X(v)] = C \int_{-\infty}^{\min(u,v)} w(u-s) w(v-s)\, ds, \qquad (6.44)$$

او بالتكافؤ

$$R(v) = C \int_{0}^{\infty} w(y) w(y+v)\, dy. \qquad (6.45)$$

يمكن اثبات ان المعادلتين 6.44 ، 6.45 هما شرطان لازمان لتحقيق صحة المعادلة 6.45 وهكذا فان المعادلة 6.45 توافينا بمقياس لتحقيق صحة المعادلة 6.43 بدلالة دالة التغاير .

من الممكن ايضا اعطاء مقياس اخر بدلالة دالة كثافة الطيف $f(\omega)$. يمكننا ان نثبت ان الشرط اللازم والضروري لتحقيق صحة المعادلة 6.43 هو

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log f(\omega)|}{1+\omega^2}\, d\omega < \infty. \qquad (6.46)$$

اذا استطعنا تمثيل العملية $X(t)$ على شكل المعادلة 6.43, فاننا نستطيع اعطاء جواب واضح لمشكلة التنبؤ الاتية : اعطيت قيم السلسلة الزمنية الثابتة الطبيعية $X(t)$ عندما $-\infty < t \le t_0$, استخدم هذه القيم لتتنبأ قيمة $X(t_1)$, عندما يكون الزمن $t_1 > t_0$ معلوما والذي له اقل متوسط مربع الخطا من بين جميع التنبؤات الممكنة . اكتب

$$X(t_1) = \int_{-\infty}^{t_0} w(t_1-s) I(s)\, ds + \int_{t_0}^{t_1} w(t_1-s) I(s)\, ds. \qquad (6.47)$$

يمكن ان نثبت ان افضل تنبؤ لـ $X(t_1)$, نحصل عليه من التكامل الاول في المعادلة 6.47.
اذا اعطيت قيم $X(t)$ عندما $-\infty < t \leq t_0$, القاريء الذي يدرس مسائل التنبؤات وتحليل الانحدار للسلاسل الزمنية سيجد ان الوسيلة المهمة المستخدمة هي تمثيل العملية التصادفية كخارج الموشح من ضوضاء الضوء الابيض الداخلة .

التمارين

6.1 نفترض ان لـ $\{X(t), t \geq 0\}$ متوسطا هو عبارة عن كمية ثابتة $E[X(t)] = m$ وثابتا تغايريا بدالة كثافة طيف $f_X(\omega)$ نفرض ان h كمية ثابتة موجبة محددة وان $Y(t) = X(t+h) - X(t)$ اوجد دالة كثافة طيـــــف $\{Y(t), t \geq 0\}$. يستخدم اسلوب الفرق دائما في تحويل السلسلة الزمنية ذات المتوسط الثابت الذي لايساوي صفراً الى سلسلة زمنية ذات متوسط يساوي صفراً . تؤثر عمليات الفرق على دالة كثافة الطيف ولهـــذا يجب ان يؤخذ هذا التأثير بنظر الاعتبار .

6.2 نفرض ان $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ عبارة عن عملية ثابتة تغايريـــة بمتوسطات تساوي صفراً .
دالة تغاير $R(v)$, ودالة كثافة طيف $f(\omega)$ تحقق

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f(\omega)\, d\omega < \infty.$$

عبر عن دالة كثافة الطيف بدلالة $f(\omega)$ لـ :

$$Y(t) = X'(t), \tag{i}$$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)} X'(s)\, ds, \tag{ii}$$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \frac{\sin \omega(t-s)}{\omega} X'(s)\, ds. \tag{iii}$$

6.3 موجة الجيب الحقيقي ذات السعة العشوائية نفرض ان $X(t) = A(t) \cos \omega t$, حيث $\{A(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية ثابتة تغايرية بدالة تغاير $R_A(\cdot)$, وان ω كمية ثابتة موجبة عبر عن دالة كثافة طيف $\{X(t), t \geq 0\}$ بدلالة دالة كثافة طيــف $\{A(t), t \geq 0\}$ لاحظ ان $\{X(t), t \geq 0\}$ ليست ثابتة تغايرية . مع ذلـك تعرف دالة كثافة طيفها بالمعادلة 6.20, حيث $R(v)$ تعرف بالمعادلة 6.27.

6.4 مثال فيزيائي لضوضاء الضوء الابيض . نفرض ان $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ عبارة عن تيار الضوضاء الطلقية التي لها دالة تغاير معطاة في المعادلة 5.36 من الفصل 4

(i) اثبت ان الثابت التغايري ذو دالة كثافة الطيف

$$f(\omega) = \frac{eI}{\pi} \frac{2}{(\omega T)^4} \{(\omega T)^2 + 2(1 - \cos \omega T - \omega T \sin \omega T)\}$$

(ii) اثبت ، في حالة الترددات ω عندما تكون $(\omega T)^2$ صغيرة جداً أن – دالة كثافة الطيف تساوي كمية ثابتة تقريباً :

$$f(\omega) = \frac{eI}{2\pi}.$$

أي ، اذا كان الوقت T لانتقال الالكترون هوفي حدود 10^{-9} ثانية ، فان دالة كثافة الطيف يمكن اعتبارها ثابتة في حالة الترددات الى حد 100 ميكا دورة / الثانية . من خلال حركة الالكترون السار خلال المرشح الذي تكون دالة استجابة تردده صفراً في حالة الترددات اقل من 100 ميكا دورة / الثانية فانه يمكن اعتبار تيار الضوضاء الطلقية $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ عبارة عن ضوضاء الضوء الابيض .

6.5 لاتصف دالة التغاير (اودالة كثافة الطيف) بصورة وحيدة عملية الثابت التغايري . اثبت ان

$$R(t) = Ce^{-\beta|t|}$$

لبعض قيم C المناسبة ، وان β دالة تغاير (i) الاشارة التلغرافية العشوائية (ii) العملية المعرفة في التمرين 4.7 , (iii) عملية نوع التأثير الطلقي (المعرفة في البند 4-5)

$$X(t) = \sum_{-\infty < \tau_n \leq t} e^{-\alpha(t-\tau_n)}.$$

6.6 حالة كثافة طيف المعاينة عبارة عن تقدير مختلف لدالة كثافة الطيف . برهن النظرية الاتية :

اذا كانت $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية طبيعية ثابتة التغاير بمتوسطات تساوي صفراً ودالة كثافة طيف مستمرة $f(\omega)$, فان لاي تردد ω

$$\lim_{T\to\infty} \varphi_{f_T(\omega)}(u) = (1 - iuf(\omega))^{-1}.$$

بعبارة اخرى دالة كثافة طيف المعاينة $f_T(\omega)$ للعملية الطبيعية موزعة توزيعاً اسياً بمتوسط $f(\omega)$ عندما يكون حجم العينة كبيراً . نتيجة لذلك فان $f_T(\omega)$ لاتتقارب الى $f(\omega)$ عندما تقترب T الى ∞

تلميح : استخدم الصيغة المعطاة في المعادلة 4.27 لدالة الخاصية المشتركة لمربعي متغيرين عشوائيين موزعين حسب التوزيع الطبيعي بمتوسطين يساويان صفراً ، اثبت ان لدالة كثافة طيف المعاينة دالة الخاصية الاتية :

$$\varphi_{f_T(\omega)}(u) = \left\{1 - i\left(\frac{uT}{\pi}\right)[\sigma_1^2(T) + \sigma_2^2(T)] - \left(\frac{uT}{\pi}\right)^2[1 - \rho^2(T)]\sigma_1^2(T)\sigma_2^2(T)\right\}^{-1/2},$$

حيث

$$\sigma_1^2(T) = \text{Var}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t\, X(t)dt\right], \quad \sigma_2^2(T) = \text{Var}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \sin\omega t\, X(t)dt\right],$$

$$\rho(T) = \rho\left[\frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t\, X(t)dt, \frac{1}{T}\int_0^T \sin\varphi t\, X(t)dt\right].$$

وهكذا فان

$$\lim_{T\to\infty} \varphi_{f_T(\omega)}(u) = (1 - 2iuf(\omega) - u^2 f^2(\omega))^{-1/2}.$$

الفصل الرابع

العمليات العددية وعمليات بواسون

العملية العددية عبارة عن العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ التي تاخذ القيم العددية الصحيحة وهي عبارة عن عدد النقاط في فترة ما . توزع هذه النقاط بنظام ميكانيكي تتحكم فيه المصادفة .

عن الحالة المثالية تمثل الازمنة $\tau_1, \tau_2, \cdots$ النقاط التي تقع فيها الحوادث ذات الخصائص المعينة حيث $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$. تسمى المتغيرات العشوائية $T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_2 - \tau_1, \cdots, T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, \cdots$ بازمنة الوصول المتتابعة . اذا كانت $N(t)$ تمثل عدد النقاط التي تقع ضمن الفترة $(0,t]$, حيث $t \geq 0$, فان العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ تسمى بعملية النقاط العددية للسلسلة .

توجد طريقتان رئيستان لتعريف العملية العددية :

(i) تعرف بصورة مباشرة $\{N(t), t \geq 0\}$ بانها عملية بتزايد مستقل او عملية ماركوف (راجع الفصل 7) او

(ii) نشتق مميزات العملية العددية من الفرضيات المتعلقة بازمنة الوصول .

تؤدي عملية بواسون دوراً مهما من بين العمليات العددية . تعتبر عملية بواسون وسيلة جيدة باستخدامها نتمكن من الحصول على عمليات تصادفية مفيدة بالاضافة الى كون عملية بواسون نموذجاً لعدد الحوادث العشوائية .

سيكون هدفنا الاساسي في الفصلين الرابع والخامس هو دراسة المميزات العامة للعمليات العددية والمميزات الخاصة لعمليات بواسون .

4-1 اشتقاق بديهيات عملية بواسون :

نحتاج الى صياغة مجموعة من البديهيات تحققها العملية التصادفية وبدورها ستكون عملية بواسون . نوجز عملية بواسون بانها

(i) عملية الولادة بمعدل ولادة ثابت (راجع البند 2-7)

(ii) عملية العد التجديدي بازمنة وصول ذات توزيع احصائي من النوع الاسي (راجع البند 2-5) .

(iii) عملية القيم العددية الصحيحة بتزايد مستقل ثابت ببعد طوله وحدة واحده مابين تزايد وآخر . (نموذج الزيادات المستقلة) .

نناقش في هذا البند النموذج (iii) ونذكر الشروط المطلوبة من اجل ان تكـــون عملية القيم العددية الصحيحة التصادفية عن عملية بواسون .

نتأمل الان الحوادث التي تحدث في الفترة الزمنية من صفر الى ∞ . عندما $t > 0,$ نفرض ان $N(t)$ عبارة عن عدد الحوادث التي تحدث في الفترة $(0,t],$ حيـــث تبدأ الفترة عند النقطة صفر وتنتهي في t . نفترض لـكل $h > 0$ ان $N(t)$ $N(t + h) - N(t)$ عبارة عن عملية قيم عددية صحيحة غير سالبة .

بديهية صفر .
ان بداية حساب الحوادث يكون من بداية الزمن صفر . لذلك نعرف $N(0)$ بانها تساوي صفراً . او

بديهية 1 :
للعملية $\{N(t), t \geq 0\}$ تزايد مستقل

بديهية 2 :
لـكل $t > 0, 0 < P[N(t) > 0] < 1$ بعبارة ثانية في اية فترة زمنية (مهمـــا كانت صغيرة) يوجد احتمال موجب لحدوث الحادثة ولو ان حدوث الحادثة لايكون بالتأكيد .

بديهية 3. :
لـكل $t \geq 0$

$$\text{غــــــا}_{h \to 0} \frac{P[N(t+h) - N(t) \geq 2]}{P[N(t+h) - N(t) = 1]} = 0.$$

بعبارة اخرى . في اي فترة زمنية قصيرة ستحدث حادثة على الاكثر بمعنى عدم حدوث الحوادث في آن واحد .

بديهية 4. :
للعملية العددية $N(t)$ تزايد ثابت . اي ان لـكل نقطتين $0 \leq s < t$ ولـكـــل $h > 0,$ توزع المتغيرات العشوائية $N(t) - N(s)$ ، $N(t+h) - N(s+h)$ توزيعاً

متماثلاً . لاعادة صياغة البديهيـــات السابقة اهميــة خاصة فاذا اهملنا البديهيــة 3 فسنحصل على عملية بواسون المستخرجة والمعرفة في البند 2–4 .

اما اذا اهملنا بديهية 4 فسنحصل على عملية بواسون غير المتجانسة المعرفة في البند 2–4 .

ان للعمليات العددية $\{N(t), -\infty < t < \infty\}$, المعرفة لجميع قيم t, الحقيقيـــة اهمية خاصة ايضاً .

تظهر هذه الحالة عندما نفترض ان حدوث هذه الحوادث يكون منذ زمن سابـــق طويل جداً .

عملية بواسون $\{N(t), -\infty < t < \infty\}$ المعرفة في المستوى غير المحدود والموصوفـــة خصائصها في البديهيات 1 الى 4, حيث يفترض ان يحققا t , s الشرط $-\infty < s \leq t < \infty$ تفصل في مثل هذه الحالة $N(t) - N(0)$, عن $N(t)$ والتي تمثل الحوادث التي وقعت في الفترة $(0,t]$

<u>نظرية 1A :</u>

ان العملية العددية $\{N(t), t \geq 0\}$ التي تحقق البديهيات صفر الى 4 عبارة عن عملية بواسون (كما معرفة في البند 3–1)

البرهان :

لبرهنة النظرية نثبت وجود كمية ثابتة موجبة ν بحيث يكون لكل $t > 0$, $N(t)$ موزعة حسب توزيع بواسون بمتوسط يساوي νt.
ان الدالة المولدة لاحتمال $N(t)$, تكون كما في الشكل الاتي :

$$\psi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P[N(t) = n], \qquad (1.1)$$

المعرفة عندما $|z| \leq 1$, وتحقق

$$\psi(z,t) = e^{\nu t(z-1)}, \quad |z| < 1, \qquad (1.2)$$

وهذه ، عبارة عن دالة مولدة لاحتمال المتغير العشوائي وتكون موزعة حسب توزيع ، . . .

بواسون بمتوسط νt . نبرهن اولاً صحة المعادلة 1.2 وفقاً لفرضية وجود كمية ثابتة موجبة ν تحقق :

$$\underset{h\to 0}{\text{غـا}} \frac{1 - P[N(h) = 0]}{h} = \nu, \tag{1.3}$$

$$\underset{h\to 0}{\text{غـا}} \frac{P[N(h) = 1]}{h} = \nu, \tag{1.4}$$

$$\underset{h\to 0}{\text{غـا}} \frac{P[N(h) \geq 2]}{h} = 0. \tag{1.5}$$

بما ان لـ $\{N(t), t \geq 0\}$ تزايداً مستقلاً فان لكل من $t \geq 0$ ، h

$$E[z^{N(t+h)}] = E[z^{N(t+h)-N(t)}]E[z^{N(t)}]. \tag{1.6}$$

بما ان لـ $\{N(t), t \geq 0\}$ تزايداً ثابتاً فنحصل من المعادلة 1.6 على

$$\psi(z, t + h) = \psi(z,t)\psi(z,h), \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{h} \{\psi(z, t + h) - \psi(z,t)\} = \psi(z,t) \frac{1}{h} \{\psi(z,h) - 1\}. \tag{1.8}$$

من المعادلات 1.3 الى 1.5 نحصل على

$$\underset{h\to 0}{\text{غـا}} \frac{1}{h} \{\psi(z,h) - 1\} = \nu(z - 1). \tag{1.9}$$

نستطيع ان نكتب مايلي :

$$\frac{1}{h} \{\psi(z,h) - 1\} = \frac{1}{h} \{P[N(h) = 0] - 1\} + z \frac{1}{h} P[N(h) = 1] + \frac{1}{h} \sum_{n=2}^{\infty} z^n P[N(h) = n]. \tag{1.10}$$

عندما $|z| < 1,$

$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n P[N(h) = n] \leq P[N(h) \geq 2].$$

نحصل من المعادلات 1.10, 1.3, 1.4, 1.5 على المعادلة

نفترض مرة آخرى ان تقترب الى صفر في المعادلة .1.8 باستخدام المعادلة 1.9 يتبين لنا ان لغاية الجهة اليمنى من المعادلة 1.8 قيمة حقيقية . وهكذا ستكون لغاية جهة

المعادلة اليسرى قيمة حقيقية . اذن – تحقق الدالة المولدة للاحتمال $N(t)$ معادلة التفاضل عندما $|z| < 1$ ولجميع قيم $t \geq 0,$ وكما يلي :

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(z,t) = \nu(z-1)\psi(z,t). \qquad (1.11)$$

نحصل من المعادلة 1.11, والشرط الابتدائي $\psi(z,0) = 1,$ على المعادلة 1.2.

نثبت الان وجود كمية ثابتة موجبة ν تحقق المعادلات 1.3 الى 1.5 من اجل انهاء البرهان . نعرف ما يلي :

$$P_0(t) = P[N(t) = 0]. \qquad (1.12)$$

بما ان

$$P[N(t_1+t_2) = 0] = P[N(t_1+t_2) - N(t_1) = 0 \quad \text{and} \quad N(t_1) = 0], \qquad (1.13)$$

نحصل من افتراض التزايد الثابت المستقل على

$$P_0(t_1+t_2) = P_0(t_1)P_0(t_2). \qquad (1.14)$$

بما ان $P_0(t)$ دالة محدودة . نحصل من النظرية 1B ادناه اما

$$P_0(t) = e^{-\nu t} \quad \text{للكمية الثابتة } \nu \qquad (1.15)$$

او ان $P_0(t)$ تساوي صفراً بالتماثل . من البديهية 2 , $0 < P_0(t) < 1$ لجميع قيم t

وهكذا تتحقق صحة المعادلة 1.15 عندما $\nu > 0.$ نحصل من المعادلة 1.15 على المعادلة 1.3. من اجل الحصول على المعادلة 1.4 نعرف

$$P_1(t) = P[N(t) = 1] \text{ and } Q(t) = P[N(t) \geq 2].$$

اذن نكتب ما يلي :

$$\frac{P_1(h)}{h}\left\{1 + \frac{Q(h)}{P_1(h)}\right\} = \frac{1 - P_0(h)}{h}. \qquad (1.16)$$

من البديهية 3,

$$\lim_{h \to 0}\frac{Q(h)}{P_1(h)} = 0. \qquad (1.17)$$

نحصل من المعادلتين 1.16 ، 1.17 على المعادلة 1.4. ومن المعادلتين 1.4 ، 1.17 نحصل على المعادلة 1.5. وهو المطلوب اثباته

هل المعادلات دوال معينة :

في دراستنا لمميزات العمليات التصادفية ذات التزايد المستقل الثابت نواجه غالباً دوالاً تحقق معادلات الدوال التالية :

$$g(t_1 + t_2) = g(t_1) + g(t_2) \quad \text{for} \quad t_1, t_2 > 0, \tag{1.18}$$
$$f(t_1 + t_2) = f(t_1)f(t_2) \quad \text{for} \quad t_1, t_2 > 0. \tag{1.19}$$

يعطى حل المعادلة 1.18 في المكملة 1D نناقش الان حل معادلة (1.19)

نظرية 1B

افرض ان $\{f(t), t > 0\}$ عبارة عن دالة قيم حقيقية تحقق المعادلة 1.19 وتكون محدودة في كل فاصلة منتهية . اذن اما ان تختفي قيم $f(t)$ بالتماثل او توجد كمية ثابتة ν بحيث

$$f(t) = e^{-\nu t}, t > 0. \tag{1.20}$$

البرهان:
نبرهن النظرية اولاً وفقاً للافتراض الاقوى القائل بان الدالة مستمرة اوغيرتنازلية . من المعادلة 1.19 ولكل عددين صحيحين m ، n ولكل $t > 0$ نحصل على

$$f(mt) = [f(t)]^m, \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = [f(1)]^{1/n}.$$

وهكذا فان لكل عدد نسبي t (أي العدد a ذي الشكل $t = m/n$ للعددين الصحيحين m ، n)

$$f(t) = \{f(1)\}^t. \tag{1.21}$$

نبين بعد ذلك ان المعادلة 1.21 تتحقق صحتها لكل عدد حقيقي t افرض ان $\{t_n\}$ عبارة عن تتابع من الاعداد النسبية ، كل منهما اقل من t بحيث يتقارب التتابع $\{t_n\}$ الى t ومن ذلك يتبين ان

$$\lim_{n \to \infty} \{f(1)\}^{t_n} = \{f(1)\}^t.$$

اذا كانت $f(t)$ مستمرة فان $\lim_{n \to \infty} f(t_n) = f(t)$ والتي تبرهن صحة

المعادلة 1.21 اذا كانت $f(t)$ غير تنازلية فان $t_n \leq t$ تعني $f(t_n) \leq f(t)$ تعني $\{f(1)\}^t \leq f(t)$ لكي نثبت ان $f(t) \leq \{f(1)\}^t$, وبعد ذلك $f(t) = \{f(1)\}^t$,
نختار تتابع الاعداد النسبية $\{t_n^*\}$ حيث كل عدد اكبر من t بحيث يتقارب التتابع $\{t_n^*\}$ الى t ان $t_n^* \geq t$ يعني $f(t_n^*) \geq f(t)$ يعني $\{f(1)\}^t \geq f(t)$. بما ان $f(1) = [f(1/n)]^n \geq 0$ عندما تكون n زوجية فانه في حالة عدم اختفاء $f(t)$ بالتماثل . سيوجد عددحقيقي ν بحيث $f(1) = e^{-\nu}$, وانه من المعادلة 1.21 يمكن كتابة $f(t)$ على شكل المعادلة 1.20

نبرهن نظرية IB بالتماثل فنجد نقطة $t_0 > 0$ بحيث $f(t_0) > 0$ لان $f(2t) = f^2(t)$ افرض ان $F(t) = [f(t_0)]^{-t} f(t_0 t)$ لكي نبرهن صحة المعادلة 1.20 لعدد ما ν نثبت مايلي :

$$F(t) = 1 \quad \text{لجميع قيم} \quad t > 0, \tag{1.22}$$

تعني المعادلة 1.22 ان

$$f(t_0 t) = [f(t_0)]^t \quad \text{لجميع قيم} \quad t > 0$$

اذن (افرض ان $u = t_0 t$)

$$f(u) = [\{f(t_0)\}^{1/t_0}]^u = e^{-\nu u} \quad \text{لجميع قيم} \; u > 0 \; \text{حيث} \; \nu = -(1/t_0)\log f(t_0)$$

لكي نبرهن صحة المعادلة 1.22 نتبع مايلي : من الواضح ان $F(1) = 1$ وان $F(t)$ تحقق المعادلة 1.19. اذن $F(m/n) = 1$ لكل عددين صحيحين n, m بحيث $F(t) = 1$ لجميع الاعداد النسبية t ان لكل عدد $t > 0$ يوجد عدد نسبي r بحيث $t' = t - r$ يحقق $0 < t' \leq 1$ ومنه نحصل على $F(t) = F(t')F(r) = F(t')$ وهكذا فان لكل قيمة تأخذها $F(\cdot)$ لقيم t ستكون في الفاصلة $0 < t \leq 1$ ان $F(\cdot)$ محدودة في الفاصلة $0 < t \leq 1$ لان $f(\cdot)$ يفترض ان تكون محدودة في كل فاصلة منتهية . اذن $F(\cdot)$ عبارة عن دالة محدودة . اي توجد كمية ثابتة K بحيث

$$|F(t)| \leq K \quad \text{لجميع قيم} \quad t \tag{1.23}$$

نفترض ان $F(\tau) = c \neq 1$ لقيمة ما $\tau > 0$. يمكن ان نفترض ان $c > 1, 0 < \tau < 1$ لان $F(1 - \tau) = c^{-1}$. بما ان $F(N\tau) = c^N$, وان c^N يمكن ان تكون كبيرة وذلك باختيار N كبيرة الى درجة ما .

من ذلك نحصل اذا لم تتحقق صحة المعادلة 1.22 على عدم وجود اية كمية ثابتة K بحيث تتحقق صحة المعادلة 1.23 . وهو المطلوب اثباته .

المكملات :

1A اشتقاق اخر لعملية بواسون

اكتب برهان نظرية 1A عبر الاسطر الآتية :

عرف $P_n(t) = P[N(t) = n]$ اثبت ان لكل t ، s

$$P_n(t+s) = \sum_{j=0}^{n} P_j(t) P_{n-j}(s).$$

افترض صحة المعادلات 1.3 الى 1.5 اثبت ان $P_n(t)$ تحقق نظـــام معادلات التفاضل عندما $n = 1, 2, \cdots$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\nu P_n(t) + \nu P_{n-1}(t),$$

بالشروط الابتدائية $P_n(0) = 0$. بعد ذلك اثبت ان

$$P_n(t) = e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!}.$$

التوزيع الاسي عبارة عن توزيع وحيد بدون ذاكرة

يطلق على المتغير العشوائي غير السالب T بانه بدون ذاكرة اذا كان لاي عددين موجبين x ، y

$$P[T > x + y \mid T > x] = P[T > y]. \tag{1.24}$$

والعكس صحيح

اثبت ان صحة المعادلة 1.24 تتحقق اذا كانت T موزعة حســـب التوزيع الاسي والعكس صحيح .

1B خصوصية التوزيع الهندسي :

اثبت اذا كان T موجباً وذا قيم عددية صحيحة فان صحة المعادلة 1.24 تتحقق في حالة العددين غير السالبين x ، y اذا كان لكمية ثابتة ما p .

$$P[T = x] = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \cdots$$

والعكس صحيح .

1D - برهن النظرية الاتية (قارن ذلك مع الاحتمالات المتقدمة ص 263) افرض ان $g(\cdot)$ عبارة عن دالة قيم حقيقية معرفة لقيم $t \geq 0$ والتي تحقق المعادلة 1.18 الدالة $g(\cdot)$ عبارة عن دالة خطية

$$g(t) = ct, \quad t \geq 0,$$

لكمية ثابتة c اذا تحقق أي من الشروط الاتية :

(i) $g(t)$ مستمرة عندما $t \geq 0$

(ii) $g(t) \geq 0$ لجميع قيم $t \geq 0$

(iii) $g(t)$ محدودة في الفاصلة صفر الى 1 .

(iv) $g(t)$ محدودة في فاصلة منتهية 1 .

1E - شكل دالة خاصية العملية التصادفية ذات التزايد الثابت المستقل تكون محدودة

اذا تأملنا دالة خاصية المجموع للمتغيرات العشوائية المستقلةالمتماثلةالتوزيع $X_1, \cdots, X_n$ نرى ان

$$\varphi_{S_n}(u) = \varphi_{X_1}(u) \cdots \varphi_{X_n}(u) = [\varphi_{X_1}(u)]^n,$$

بحيث $\varphi_{S_n}(u)$ تكون القوة النونية لدالة الخاصية . برهن الصيغ الاتية :

اذا كان (i) $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية بتزايد مستقل ثابت

(ii) $X(0) = 0$ ، (iii) لكل عدد حقيقي u ، $\varphi_{X(t)}(u)$ دالة مستمرة لـ t ان

$$\varphi_{X(t)}(u) = [\varphi_{X(1)}(u)]^t.$$

اثبت ان لكل قيمة مثبتة ، فان لـ $\varphi_{X(t)}(u)$ الخاصية التالية لكل عدد حقيقي $r \geq 0$ ، $[\varphi_{X(t)}(u)]^r$ عبارة عن دالة خاصية .

1F-قوانين القسمة اللامنتهية .

يطلق على دالة الخاصية $\varphi(u)$ التي لها الميزة التالية ان لكل $r \geq 0$ ، $[\varphi(u)]^r$ ، بدالة خاصية القسمة اللامنتهية . اثبت ان لدوال الخاصية الاتية تقسيم لامنته

$$\varphi(u) = \exp[ium - \tfrac{1}{2} u^2\sigma^2] \qquad \text{(i)}$$

$\lambda > 0$ حيث $\varphi(u) = \exp[\lambda(e^{iu} - 1)]$ (ii)

$f(x)$ حيث $\varphi(u) = \exp\left[\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1) f(x)\, dx\right]$ (iii)

عبارة عن دالة كثافة الاحتمال وان $\lambda > 0$

$0 < q < 1$ حيث $\varphi(u) = (1-q)(1-q\,e^{iu})^{-1}$ (iv)

1G– اثبت ان دالة خاصية القسمة اللامنتهية لاتختفي (لاتكون صفراً)

4.2 عمليات بواسون المركبة ، العمومية ، غير المتجانسة :

نستطيع ان نثبت ان لعملية القيم العدديه الصحيحة $\{N(t), t \geq 0\}$ التي لها تزايد مستقل وان ما بين زيادة واخرى وحدة واحدة ، دالة الخاصية الاتية لكل $t \geq 0$

$$\varphi_{N(t)}(u) = \exp[m(t)\{e^{iu} - 1\}] \qquad (2.1)$$

لدالة ما غير تنازلية $m(\cdot)$. بعبارة اخرى $N(t)$ موزعة حسب توزيع بواسون بمتوسط $m(t)$ هي حالة عملية بواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ ذات التزايد الثابت

$$m(t) = E[N(t)] = \nu t. \qquad (2.2)$$

حيث $m(t)$ منسوبة تناسباً طردياً مع t بعامل نسبة يساوي ν . وهو عبارة عن معدل متوسط الحوادث الحادثة . في حالة عدم تحقق صحة المعادلة 2.2 نطلق على العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ بعملية غير متجانسة (او عملية بواسون ذات التزايد غير الثابت)

تسمى عملية بواسون ذات التزايد الثابت بعملية بواسون المتجانسة .

يفترض ان تكون القيمة الوسطية $m(t)$ دائما مستمرة . يفترض عادة في $m(t)$ وامكانية تفاضلها حيث يرمز لمشتقتها بالرمز الاتي :

$$\nu(t) = \frac{d}{dt}\, m(t). \qquad (2.3)$$

نسمي $\nu(t)$ دالة الكثافة . ننصح القارئ بمراجعة Khinchin (1956) للحصول على المناقشة الكاملة لدوال القيمة الوسطية غير المستمرة والاشتقاق البديهي العام للمعادلة 2.1

نشتق في هذا البند المعادلة 2.1 وفقا الى افتراض الوجود لدالة كثافة .

نظرية 2A

الاشتقاق البديهي لعملية بواسون غير المتجانسة :

افرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية قيم عددية صحيحة تحقق بديهيات صفر ، 1 ، 2 ، 3 في البند 4-1 . افترض ان لدالة ما $\nu(t)$

بديهة 4 $\quad \underset{h \to 0}{\text{غـا}} \frac{1 - P[N(t+h) - N(t) = 0]}{h} = \nu(t)$

ان لـ $N(t)$ الدالة المولدة للاحتمال الاتية

$$\psi(z,t) = \exp\{m(t)(z-1)\} \tag{2.4}$$

حيث

$$m(t) = \int_0^t \nu(t')\, dt'. \tag{2.5}$$

ملاحظة : تسمى $\nu(t)$ بدالة كثافة عملية بواسون . لاحظ ان $\nu(t)h$ تمثل الاحتمال التقريبي لحدوث حادثة في الفاصلة الزمنية t الى $t+h$. ان لعملية بواسون المتجانسة دالة كثافة عبارة عن كمية ثابتة :

$$\nu(t) = \nu \qquad \text{لجميع قيم } t$$

نتوقع لكثير من الحوادث كثافة حدوث تنازلية . (مثلا ، حوادث مناجم الفحم تكون اقل اذا اتخذت الاحتياطات اللازمة لذلك) . ان الشكل الاتي لدالة الكثافة هو الشكل الشائع

$$\nu(t) = \alpha e^{-\beta t}$$

للكميتين الثابتتين α ، β حيث يجب ان تتحدا من التجارب .

البرهان :

بما ان للعملية $\{N(t), t \geq 0\}$ تزايداً مستقلاً فاننا — نحصل على

ان

$$\psi(z, t+h) = \psi(z,t)E[z^{N(t+h)-N(t)}]. \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{h}\{E[z^{N(t+h)-N(t)}]-1\} = \frac{1}{h}\{P[N(t+h)-N(t)=0]-1\} + z\frac{1}{h}P[N(t+h)-N(t)=1] + \frac{1}{h}\sum_{n=2}^{\infty} z^n P[N(t+h)-N(t)=n]. \tag{2.7}$$

من البديهيتين 3 ، 4 نتمكن من اثبات مايلي

$$\underset{h\to 0}{\text{غــا}} \frac{1}{h}\{E[z^{N(t+h)-N(t)}]-1\} = \nu(t)\{z-1\}. \tag{2.8}$$

من المعادلتين 2.6 ، 2.8 نستنتج ان $\psi(z,t)$ تحقق معادلة التفاضل الاتية عندما $|z| < 1$ وان لكل $t \geq 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(z,t) = \psi(z,t)\nu(t)\{z-1\}. \tag{2.9}$$

ان حل المعادله 2.9 يعطي بالمعادلة 4·2 وفقا للشرط الابتدائي $\psi(z,0)=1$.

نستطيع تحويل عمليه بواسون غير المتجانسة الى عملية بواسون المتجانسة . بما ان دالة القيمة الوسطية $m(t)$ مستمرة وغير تنازلية فاننا نعرف دالة المقلوب $m^{-1}(u)$ كما يلي :

عندما $u > 0$ ، $m^{-1}(u)$ عباره عن اصغر قيمة لـ t تحقق الشرط $m(t) \geq u$. ان العملية التصادفية $\{M(u), u \geq 0\}$ المعرفة كما يلي :

$$M(u) = N(m^{-1}(u)), \qquad u \geq 0 \tag{2.10}$$

عبارة عن عملية بواسون بدالة قيمة وسطية .

$$E[M(u)] = E[N(m^{-1}(u))] = m(m^{-1}(u)) = u. \tag{2.11}$$

وهكذا فان $\{M(u), u \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون المتجانسة بكثافة $\nu = 1$.

تستخدم معادله التحويل 2.10 غالباً في دراسة خواص عمليات بواسون غيـــــر المتجانسة (راجع المكملة 4B) .

عملية بواسون العمومية :

يطلق على العملية التصادفية للقيم العددية الصحيحة $\{N(t), t \geq 0\}$ ذات التزايد المستقل الثابت بعملية بواسون العمومية . يمكن ان نثبت ان لعملية بواسون العمومية بالضرورة دالة خاصية تكون بالشكل الاتي :

$$\varphi_{N(t)}(u) = e^{\nu t[\varphi(u)-1]} \tag{2.12}$$

لكمية ثابتة ما ν ولدالة خاصية ما

$$\varphi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{iku}, \tag{2.13}$$

وهي عبارة عن دالة خاصية للمتغيرات العشوائية ذات القيم العددية الصحيحة غير السالبة بتوزيع احتمالي $\{p_k\}$. ان عملية بواسون مناظرة للحالة $\varphi(u) = e^{iu}$. الحالات المهمة الاخرى لـ $\varphi(u)$ المعتبرة هي :

توزيع بواسون $\varphi(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$

توزيع ذات الحدين السالب $\varphi(u) = \left(\frac{p}{1-qe^{iu}}\right)^r$

نناقش ادناه مختلف الظواهر العشوائية التي تمثلها عملية بواسون العمومية نوضح اولاً الاشتقاق البدهي لعملية بواسون العمومية .

نظرية 2B

الاشتقاق البدهي لعملية بواسون العمومية : افرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية عددية تحقق البديهيات صفر، 1 ، 2 ، 4 بالاضافة الى ذلك نفترض وجود تتابع $\{p_k\}$ بحيث عندما $t \geq 0$, $k = 1, 2, \cdots$

$$\lim_{h \to 0} P[N(t+h) - N(t) = k \mid N(t+h) - N(t) \geq 1] = p_k. \tag{2.14}$$

فان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تزايد مستقل ثابت تحقق المعادلة 2.12 لكمية ثابتة ما ν .

ملاحظة :

ان p_k تمثل الاحتمال المشروط لحدوث k حادثة آنياً في أي زمن معلوم اذا علمت بوقوع حادثة واحدة في الاقل .

البرهان :

كما في برهان النظرية 1A نحصل على الدالة المولدة للاحتمال

$$\psi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P[N(t) = n]$$

التي تحقق معادلة التفاضل

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(z,t) = \psi(z,t) \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{\psi(z,h) - 1\}. \tag{2.15}$$

ان

$$\frac{1}{h} \{\psi(z,h) - 1\} = \frac{1}{h} \{P[N(h) = 0] - 1\} + \frac{P[N(h) \geq 1]}{h} \sum_{n=1}^{\infty} z^n P[N(h) = n \mid N(h) \geq 1]. \tag{2.16}$$

كما في برهان النظرية 1A نتمكن من اثبات وجود كمية ثابتة $\nu > 0$ بحيث

$$\underset{h \to 0}{\text{غا}} \frac{1}{h} \{1 - P[N(h) = 0]\} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P[N(h) \geq 1] = \nu. \tag{2.17}$$

من المعادلة 2.14 نحصل على

$$\underset{h \to 0}{\text{غا}} \sum_{n=1}^{\infty} z^n P[N(h) = n \mid N(h) \geq 1] = \sum_{n=1}^{\infty} z^n p_n; \tag{2.18}$$

من الممكن ان نغير ترتيب الغاية والمجموع في المعادلة 2.18 وذلك مـن نظـريـة التقارب المفصلة (راجع البند 10–6) هي المعادلات 2.15 الى 2.18 نحصل على .

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(z,t) = \psi(z,t)\nu\{\psi(z) - 1\}, \tag{2.19}$$

حيث

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n p_n. \qquad (2.20)$$

وهكذا فان

$$\psi(z, t)=e^{\nu t\{\psi(z)-1\}}, \qquad (2.21)$$

والتي تماثل المعادلة 2.12

عمليات بواسون المركبة :

يقال ان العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون المركبة اذا امكن تمثيلها لكل $t \geq 0$ كما يلي :

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, \qquad (2.22)$$

حيث $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون وان $\{Y_n, n=1, 2, \cdots\}$ عبارة عن عائلة من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي Y يفترض في التابع $\{Y_n\}$ والعملية $\{N(t), t \geq 0\}$ ان يكونا مستقلين .

يجب ان نلاحظ ان جهة المعادلة 2.22 اليمنى عبارة عن مجموع عدد عشوائي من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع .

قبل ان نذكر خصائص عمليات بواسون المركبة ، نوضح تطبيق هذه العمليات من خلال الامثلة الآتية :

مثال : 2A

مجموع الطلبات المعروضة على شركة تأمين :

نفترض ان نهاية حياة اصحاب عقود التأمين التابعة لشركة تأمين على الحياة معينة تكون في الازمنة $\tau_1, \tau_2, \cdots$ حيث $0<\tau_1<\tau_2<\cdots$ نفترض ان حدوث الوفاة عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة تساوي ν .

ان لصاحب العقد المتوفي في الزمن τ_n عقد تأمين بمبلغ Y_n والتي يجب ان تدفع الى الوصي في حالة الوفاة .

ترغب شركة التأمين بمعرفة كمية المبالغ $X(t)$ التي يجب على الشركة دفعها في الفترة الزمنية من صفر الى t من اجل معرفة كمية الاحتياط اللازم الاحتفاظ به لتغطية الكمية المطلوبة .

نستطيع ان نمثل $X(t)$ على شكل المعادلة 2.22 اذن $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون المركبة .

مثال : 2B

انجرافات الاحجار في قعر الانهار :

نفترض ان ازاحة الاحجار في قعر الانهار تكون في الازمنة $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ حيث يفترض في الازاحات ان تكون حوادث من نوع بواسون بكثافة تساوي ν . ان ازاحة الحجر في الزمن τ_n عبارة عن متغير عشوائي Y_n . نفترض ان مجموع الازاحة التي قطعها الحجر خلال الزمن t تمثل $X(t)$ على شكل المعادلة 2.22 وهكذا فان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون المركبة .

مثال : 2C

نموذج لحركة براون :

يظهر نموذج حركة جزيئة ما نتيجة للاصطدامات الهائلة المتكررة والعشوائية للجزيئة مع الجزيئات الاخرى . نوضح هذا المفهوم كما يلي : نفترض ان وقوع اصطدام الجزيئة يكون في الازمنة $\cdots > \tau_2 > \tau_1 > 0$ وان حدوث هذه الاصطدامات عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة تساوي ν . نفترض ان تغيير موقع الجزيئة نتيجة للاصطدام في الزمن τ_n عبارة عن كمية عشوائية Y_n نحصل على موقع الجزيئة في الزمن t وذلك من المعادلة 2.22 بافتراض ان موقع الجزيئة يكون عند النقطة صفر في الزمن صفر . نتمكن من اثبات ان العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ تماثل بالتقارب عملية وينر بسبب تزايد عدد الاصطدامات في وحدة الزمن بحالة غير محدودة (راجع البند 5-3) .

مثال : 2D

توزيع الكواكب :

نفترض (i) وجود مركز (مثل مراكز الكواكب العنقودية في النظام النجمي او مركز لمجتمع الحيوانات موزع عشوائيا (حسب عملية بواسون بكثافة تساوي ν ضمن مساحة اوفضاء ذي ثلاثة ابعاد) (ii) كل مركز يؤدي الى ظهور عدد من الكواكب او الاجيال (حيث يكون العدد الحقيقي عبارة عن متغير عشوائي Y بقانون احتمال $P[Y = k] = p_k$) (iii) يكون توزيع الكواكب او الاجيال التابعة لاي مركز حول فضاء ذلك المركز بصورة مستقلة بعضهم عن بعض آخر .

نكتب العدد الكلي $X(R)$ للكواكب او الاجيال المتكونة في المنطقة R (ذات المساحة او الحجم t) كما يلي :

$$X(R) = \sum_{\tau_n \in R} Y_n, \tag{2.23}$$

حيث Y_n عبارة عن الكواكب او الاجيال المتكونة من المركز في الزمن τ_n نستخرج قانون احتمال المتغيرات العشوائية المعرفة في المعادلة 2.23 بنفس طريقة معاملة المتغيرات العشوائية في المعادلة 2.22 تؤدي المتغيرات العشوائية في المعادلة 2.23 ادواراً مهمة في نظرية التوزيع الفضائي للكواكب التي تطورت حديثا من قبل E. L. Scott ، J. Neyman (ولاهمية هذه النظرية راجع كتاب نيومان وسكوت سنة [1957] اما للاهمية التكنيكية راجع كتاب نيومان وسكوت سنة [1958]) .

نظرية : 2C

لعملية بواسون المركبة $\{X(t), t \geq 0\}$ تزايد مستقل ثابت ودالة خاصية كما يلي ولكل $t \geq 0$

$$\varphi_{X(t)}(u) = e^{\nu t\{\varphi_Y(u) - 1\}}, \tag{2.24}$$

حيث $\varphi_Y(u)$ عبارة عن دالة خاصية المتغيرات العشوائية المشتركة المستقلة المتماثلة التوزيع $\{Y_n\}$ وان ν عبارة عن معدل متوسط وقوع الحوادث . اذا كانت $E[Y^2] < \infty$ فان عزوم $X(t)$ الثنائية المحدودة تعطي كما يلي :

$$E[X(t)] = \nu t\, E[Y], \tag{2.25}$$
$$\mathrm{Var}[X(t)] = \nu t\, E[Y^2], \tag{2.26}$$
$$\mathrm{Cov}[X(s), X(t)] = \nu E[Y^2] \min(s,t). \tag{2.27}$$

ملاحظة :

نستنتج من المعادلة 2.24 اذا كان Y قيم عدد صحيح فان عملية بواسون المركبة $\{X(t), t \geq 0\}$ ستكون عبارة عن عملية بواسون العمومية وبالعكس نستطيع تمثيل عملية بواسون العمومية بعملية بواسون المركبة . تظهر عملية بواسون العمومية على كل حال بطرق اخرى . مثلا يمكن تمثيلها على شكل ترتيب خطي غير منتهٍ لعمليات بواسون (راجع المكملة 2A) .

البرهان

بما ان لعملية بواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ تزايداً مستقلاً وبما ان $\{Y_n\}$ عبارة عن تتابع من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع فان من الواضح $\{X(t), t \geq 0\}$ ذات تزايد مستقل (لانعطي برهاناً اساسياً) . لكي نبرهن $\{X(t), t \geq 0\}$ لها تزايد ثابت ونبرهن صحة المعادلة 2.24 نبرهن لكل $0 \leq s < t$ مايلي :

$$\varphi_{X(t)-X(s)}(u) = \exp[\nu(t-s)\{\varphi_Y(u) - 1\}]. \tag{2.28}$$

عندما $n = 0, 1, 2, \cdots$ فان

$$E[e^{iu\{X(t)-X(s)\}} \mid N(t) - N(s) = n] = \{\varphi_Y(u)\}^n,$$

لانه اذا اعطيت حدوث n حادثة في الفاصلة $(s,t]$: فان $X(t) - X(s)$ عبارة عن مجموع n من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع كالمتغير Y . ان

$$\begin{aligned}
\varphi_{X(t)-X(s)}(u) &= \sum_{n=0} E[e^{iu\{X(t)-X(s)\}} \mid N(t) - N(s) = n] P[N(t) - N(s) = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi_Y(u)\}^n e^{-\nu(t-s)} \frac{\{\nu(t-s)\}^n}{n!} \\
&= e^{-\nu(t-s)} \exp[\nu(t-s)\varphi_Y(u)].
\end{aligned}$$

وهو المطلوب اثباته للمعادلة 2.28 . لكي نبرهن المعادلتين 2.25 2.26 ، نفاضل اما المعادلة 2.24 اواستخدام صيغ (المعطاة في البند 2-2) تباين متوسطات مجموع عدد عشوائي من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع :

$$E[X(t)] = E[N(t)]E[Y] = \nu t\, E[Y],$$
$$\mathrm{Var}[X(t)] = E[N(t)]\,\mathrm{Var}[Y] + \mathrm{Var}[N(t)]E^2[Y] = \nu t\, E[Y^2].$$

يترك برهان المعادلة 2.27 كتمرين للقارىء .

المكملات :

2A تمثيل عملية بواسون العمومية كترتيب خطي غير منتهٍ لعمليات بواسون نفرض $\{N_k(t), t \geq 0\}, k=1, 2, \cdots$ عبارة عن تتابع من عمليات بواسون المستقلة بمعدلات . متوسطة تساوي λ_k على الترتيب . نفترض ان $\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$. نعرف $p_k = \lambda_k/\nu$ نعرف ايضاً .

$$N(t) = N_1(t) + 2N_2(t) + \cdots + kN_k(t) + \cdots.$$

اثبت ان $\{N(t), t \geq 0\}$.

عبارة عن عملية بواسون العمومية بدالة خاصية معطاة بالمعادلة 2.12 .

التمارين :

اوجد عندما $t > 0$ لكل من العمليات التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ الموصوفة في التمارين 2.1 الى 2.7 مايلي (i) المتوسط $E[X(t)]$ ، (ii) التباين $\mathrm{Var}[X(t)]$ ، (iii) الاحتمال $P[X(t) = 0]$ ، (iv) دالة الخاصية $\varphi_{X(t)}(u)$.

2.1 نفترض ان وصول الجزيئات الى عداد كيجر حسب عملية بواسون بمعدل 6 جزيئات بالدقيقة . احتمال تسجيل الجزيئة الواصلة الى العداد 2/3 . نفرض $X(t)$ عبارة عن عدد الجزيئات المسجلة في الزمن t .

2.2 تقوم ربة بيت ببيع اشتراك المجلات بالبريد استجابة الزبائن يكون عبارة عن حوادث من

نوع بواسون بمعدل متوسط 6 باليوم الواحد يكون اشتراك الزبائن لمدة سنة ، 2 سنة ، 3 سنة باحتمال 1/2 ، 1/3 ، 1/6 على الترتيب ويكون الاشتراك مستقلاً بعضهم عن بعض يدفع للسيدة مقدار $1 عن كل اشتراك سنوي في حالة وصول طلب الاشتراك . نفرض ان $X(t)$ عبارةعن العمولة الكلية التي تحصل عليها السيدة من الاشتراكات خلال الفترة من صفر الى t .

2.3 (صياغة اخرى للتمرين 2.2) . اوجد حلاً للتمرين 2.2 بافتراض ان السيدة كثيرة النسيان وانها لاتعلم جميع الاشتراكات الحاصلة من قبلها . انها ستستلم 2/3 من الاشتراكات (اختير الرقم عشوائياً) المطلوبة .

2.4 نفرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون بمعدل متوسط يساوي ν في وحدة الزمن والتي تمثل عدد الاشعة الكونية الواصلة الى مرصد جوي معين خلال الزمن صفر الى t .

افترض ان عدد الجزيئات في كل شعاع كوني عبارة عن متغيرات عشوائية . مستقلة متماثلة التوزيع كل منهما يخضع للتوزيع الهندسي بمتوسط يساوي λ . افرض ان $X(t)$ عبارة عن عدد الجزيئات المسجلة في الزمن من صفر الى t .

2.5 نفرض $X(t)$ عبارة عن الازاحة الكلية في الزمن t للحجر الموصوف في المثال 2B .

نفترض ان الازاحة تخضع للتوزيع الهندسي ذي المعلمين λ , ν .

2.6 نفرض ان $X(t)$ عبارة عن الطلبات الكلية العائدة لشركة التأمين الموصوفة في المثال 2A افترض ان كمية الطلبات عبارة عن متغير عشوائي (i) ذو . توزيع منتظم بين $1.000 ، $10,000 (ii) ذي توزيع اسي بمتوسط $5.000 .

2.7 نفرض ان $X(t)$ عبارة عن كمية البضاعة المطلوبة من منتج معين خلال t يوم .

افترض ان الطلبات عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة ν باليوم بينما تكون الكمية المطلوبة عبارة عن التوزيع الاسي بمتوسط μ .

4-3 ازمنة الوصول وازمنة الانتظار :

جرت العادة في التجارب المشاهدة لانبعاث الجزيئات من مادة مشعة ان يحدد ، الزمن على اساس العدد المعلوم من الجزيئات المسجلة وليس بحساب الجزيئات المنبعثة خلال فاصلة زمنية معلومة . هذا يؤدي الى اعتبار المتغير العشوائي W_n والذي يسمى بزمن الانتظار *waiting time* الى ان تقع الحادثة n . وهذا الزمن يمثل الوقت المستغرق ، لتسجيل n حادثة اذا شاهدنا متوالية من الحوادث الواقعة زمنياً .

تعرف ازمنة الوصول المتتابعة $T_1, T_2, \cdots$ اذا علمنا بوقوع الحوادث في الفاصلة صفر الى ∞ كما يلي : T_1 عبارة عن الفترة الزمنية من صفر الى وقوع الحادثة الأولى .
وعندما $j > 1$ فان T_j عبارة عن الفترة الزمنية المحصورة بين الحادثة $(j-1)$ ، والحادثة j .

نوضح ازمنة الوصول $\{T_n\}$ بدلالة ازمنة الانتظار كما في الصورة ادناه

$$T_1 = W_1, T_2 = W_2 - W_1, \cdots, T_n = W_n - W_{n-1}, \cdots. \qquad (3.1)$$

نوضح ازمنة الانتظار $\{W_n\}$ بدلالة ازمنة الوصول كما في الصورة ادناه

$$W_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n \qquad \text{for } n \geq 1. \qquad (3.2)$$

هناك علاقة اساسية بين عملية العد $\{N(t), t \geq 0\}$ وتتابع ازمنة الوصول المناظرة $\{W_n\}$ لكل $t > 0$، $n = 1, 2, \cdots$.

(3.3) اذا كانت $N(t) \leq n$ فان $W_{n+1} > t$ والعكس صحيح. نوضح 3.3 بعبارة اخرى وكما يلي : تكون عدد الحوادث الواقعة في الفاصلة $[0,t)$ اقل اوتساوي n اذا كان زمن الانتظار الى ان تقع الحادثة $(n+1)$ اكبر من والعكس صحيح . نحصل من المعادلة 3.3 على :

(3.4) اذا كان $W_n \leq t$ ، $N(t) = n$ ، $W_{n+1} > t$ والعكس صحيح نوضح المعادلة 3.4 كما يلي : تحدث n حادثة في الفاصلة $[0,t)$ اذا كان زمن الانتظار الى ان تحدث ، الحادثة n اقل اويساوي t وزمن الانتظار الى ان تحدث الحادثة $(n+1)$ اكبر من t . نحصل من المعادلتين 3.3 ، 3.4 على العلاقتين الاحتماليتين المهمتين الاتيتين

$$P[N(t) \leq n] = P[W_{n+1} > t],\ n = 0, 1, \cdots; \tag{3.5}$$
$$P[N(t) = n] = P[W_n \leq t] - P[W_{n+1} \leq t],\ n = 1, 2, \cdots,$$
$$P[N(t) = 0] = 1 - P[W_1 \leq t]. \tag{3.6}$$

لكي نبرهن المعادلة 3.6 نلاحظ ان t . W_n . $W_{n+1} > t$ اذا كانت $W_n \leq t$ وليست $W_{n+1} \leq t$ والعكس صحيح . نوضح المعادلتين 3.5 . 3.6 بدلالة دوال توزيع ازمنة الوصول :

$$F_{N(t)}(n) = 1 - F_{W_{n+1}}(t),\ n = 0, 1, \cdots; \tag{3.7}$$
$$p_{N(t)}(n) = F_{W_n}(t) - F_{W_{n+1}}(t),\ n = 1, 2, \cdots,$$
$$p_{N(t)}(0) = 1 - F_{W_1}(t). \tag{3.8}$$

عملية بواسون ، ازمنة الانتظار الموزعة حسب توزيع كاما ، وازمنة الوصول المستقلة الموزعة حسب التوزيع الاسي :

نفرض W_n عبارة عن زمن الانتظار حتى وقوع الحادثة n في متوالية من الحوادث الواقعة في الفاصلة من صفر الى ∞ حسب عملية بواسون بمعدل متوسط يساوي ν .

تخضع W_n لقانون احتمال كاما ذي المعلمين n ، ν . وبدقة اكثر

$$f_{W_n}(t) = \nu e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^{n-1}}{(n-1)!},\quad t > 0 \tag{3.9}$$
$$= 0, \qquad t < 0;$$
$$F_{W_n}(t) = 1 - e^{-\nu t}\left(1 + \nu t + \cdots + \frac{(\nu t)^{n-1}}{(n-1)!}\right),\quad t > 0; \tag{3.10}$$
$$\varphi_{W_n}(u) = \left(1 - i\frac{u}{\nu}\right)^{-n}; \tag{3.11}$$
$$E[W_n] = \frac{n}{\nu}; \tag{3.12}$$
$$\operatorname{Var}[W_n] = \frac{n}{\nu^2}. \tag{3.13}$$

لكي نبرهن هذه الصيغ نقوم ببرهنة المعادلة 3.10 والتي نحصل عليها من الحقيقة الاتية :

$$1 - F_{W_n}(t) = P[W_n > t] = P[N(t) < n] = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^k}{k!} \cdot$$

مثال 3A

طول عمر هيكل واجزاء الماكنة :

تأمل هيكل يتكون من m مركبة والتي تصاب بالعطب المفاجيء وحسب نوع بواسون بكثافة تساوي ν . عطب المركبات يكون واحدة بعد الاخرى . اذا فرضنا W_n عبارة عن طول عمر الهيكل الى ان تعطب المركبة n . فان W_n موزعة حسب توزيع كاما بالمعلمين n ، ν وعلى هذا الاساس يكون توزيع كاما عبارة عن نموذج لطول عمر الانظمة التي تعاني من العطب . يفترض دراسة اطوال اعمار انابيب لنظام شبكة المياه . بدقة اكثر نفرض T عبارة عن عدد السنين التي يكون فيها قدم واحد من الانبوب صالح للعمل قبل تآكله . نفترض ان لـ T متوسط 36 سنة وانحراف معياري يساوي 18 سنة . اذا اعتبرنا الفرضية القائلة بان T تخضع لتوزيع كاما بالمعلمين n ، ν فاننا نستطيع تقدير n ، ν باستخدام اسلوب العزوم . اي نقدر n ، ν بالقيم التي تحقق

$$E[T] = \frac{n}{\nu} = 36, \;\; \mathrm{Var}[T] = \frac{n}{\nu^2} = (18)^2. \tag{3.14}$$

اذن

$$\nu = \frac{E[T]}{\mathrm{Var}[T]} = \frac{1}{9}, \;\; n = \frac{E^2[T]}{\mathrm{Var}[T]} = 4. \tag{3.15}$$

ان اسلوب العزوم ليس بالاسلوب العام لتقدير المعلمات [راجع Cramér ، (1946) ، 498] . المراجع الاخرى حول اساليب تقدير معالم توزيع كاما تجدها في كتاب Gupta . Groll سنة 1961 .

تثبت بعد ذلك ان ازمنة الوصول المتتابع $T_1, T_2, \cdots$ لحوادث من نوع بواسون بكثافة تساوي ν عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة موزعه بصوره متماثلة كل منها يتبع قانون الاحتمال الاسي بمتوسط يساوي $1/\nu$.

ان هذه الحقيقة عبارة عن اسلوب للاختبار الفرضي القائل بان تتابع الحوادث الواقعة عند زمن ما عبارة عن حوادث من نوع بواسون .

يفترض ان تكون ازمنة الوصول المشاهدة $T_1, T_2, \cdots$ مشاهدات مستقلة للمتغير العشوائي T . باستخدام الاختبارات المختلفة او الاختبار الموضح في البند 5-3 .
يمكن ان تختبر الفرضية القائلة بان T موزع بصورة اسية . وبنفس الطريقة ، يمكن اختبار الفرضية القائلة بان الحوادث المشاهدة هي من نوع بواسون لان عملية بواسون $\{N(t), t \geq 0\}$

مميزة بحقيقة كون ازمنة الوصول $\{T_n\}$ عبارة عن متغيرات عشوائية موزعة توزيعاً اسياً مستقلاً .

نظرية 3A

ازمنة الوصول المتتابعة $T_1, T_2, \cdots$ لحوادث من نوع بواسون بكثافة تساوي ν هي عبارة عن متغيرات عشوائية موزعة بصورة متماثلة مستقلة متبعة قانون الاحتمال الاسي بمتوسط يساوي $1/\nu$.

البرهان

قبل ان تبرهن النظرية تبرهن ما يلي : لاي عدد صحيح n واي اعداد حقيقية $t_1, t_2, \cdots, t_n$ فان :

$$P[T_1 > t_1, T_2 > t_2, \cdots, T_n > t_n] = e^{-\nu t_1} e^{-\nu t_2} \cdots e^{-\nu t_n}. \tag{3.16}$$

تتحقق صحة المعادلة 3.16 عندما يكون $n = 1$ بصورة واضحة لان

$$P[T_1 > t_1] = P[N(t_1) = 0] = e^{-\nu t_1}. \tag{3.17}$$

لكي تبرهن معادلة 3.16 بصورة عامة نثبت لاي $n > 1$ ولاي اعداد حقيقية $y, x_1, \cdots, x_{n-1}$ ان
من المعادلة ومن الحقيقة الاتية :

$$P[T_n > y \mid T_1 = x_1, \cdots, T_{n-1} = x_{n-1}] = e^{-\nu y}. \tag{3.18}$$

من المعادلة 3.18 ومن الحقيقة الآتية :

$$P[T_1 > t_1, \cdots, T_n > t_n] = \int_{t_1}^{\infty} \cdots \int_{t_{n-1}}^{\infty} P[T_n > t_n \mid T_1 = x_1, \cdots, T_{n-1} = x_{n-1}] \, f_{T_1,\ldots,T_{n-1}}(x_1, \cdots, x_{n-1}) \, dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

يمكن ان نستنتج المعادلة 3.16 وباستخدام الاستنتاج الرياضي ، ان البرهان الكامل للمعادلة 3.18 خارج نطاق هذا الكتاب نوضح البرهان حالة $n = 2$ ان

$$P[T_2 \geq y \mid T_1 = x] = P[N(y + T_1) - N(T_1) = 0 \mid T_1 = x]. \quad (3.19)$$

ان لعملية بواسون $N(\cdot)$ تزايداً مستقلاً ثابتاً ، لذلك فان :

$$P[N(y + T_1) - N(T_1) = 0 \mid T_1 = x] = P[N(y) - N(0) = 0] = e^{-\nu y} \quad (3.20)$$

نظراً لاعتماد T_1 على قيم $N(t)$ فقط ضمن الفاصلة الزمنية $0 \leq t \leq T_1$ والتي تكون مستقلة عن $N(y + T_1) - N(T_1)$ البرهان الدقيق والكامل لمعادلة 3.20 خارج نطاق هذا الكتاب . (للحصول على براهين ذات نتائج عامة ، راجع Chung [1960] او Loève [1960] اذا وافقنا على شرعية معاملة 3.20 اوبصورة عامة اذا وافقنا على شرعية الصيغة الاتية عندما $n > 1$ وللاعداد غير السالبة $y, x_1, \cdots, x_{n-1}$

$$P[T_n > y \mid T_1 = x_1, \cdots, T_{n-1} = x_{n-1}] = P[N(y + x_1 + \cdots + x_{n-1}) - N(x_1 + \cdots + x_{n-1}) = 0] = e^{-\nu y}, \quad (3.21)$$

فان هذا هو المطلوب من اثباته في حالة النظرية 3A .
برهان اخر لنظرية 3A تجده في البند 4–4 اما معكوس نظرية 3A نستمده في البند 5–2 ان نتائج هذا البند تؤدي دوراً مهماً في نظرية الاستنتاج الاحصائي لعمليات بواسون نذكر تطبيقين من هذه التطبيقات .

مثال 3B

تقدير معلم عمليه بواسون :

اذا شاهدنا عملية بواسون لزمن مشاهدة t محدد مسبقاً فان عدد المرات $N(t)$ يمكن ان تستخدم لتكوين نقطة تقدير وفترات ثقة لـ ν باستخدام كون $N(t)$ موزعة

حسب توزيع بواسون بمتوسط يساوي νt من جانب اخر ، اذا استمرت عملية المشاهدة الى ان يتم عد m مرة من الحوادث فان W_m كمية المشاهدة المطلوبة للحصول على m حادثة يمكن ان تستخدم لتكوين فترات ثقة لـ ν وذلك بكون $2\nu W_m$ موزعة حسب توزيع χ^2 بدرجات حرية تساوي $2m$ افرض ان D ، C عبارة عن قيمتين بحيث اذا كان Z موزعاً حسب توزيع χ^2 بدرجات حرية $2m$ فان $P[Z < C]=P[Z > D]=\alpha/2$ ان

$$1-\alpha = P[C \leq 2\nu W_m \leq D] = P\left[\frac{C}{2W_m} \leq \nu \leq \frac{D}{2W_m}\right]$$

وهكذا فان $(C/2W_m, D/2W_m)$ عبارة عن فترة ثقة لـ ν بمعامل ثقة يساوي $1-\alpha$ للحصول على مراجع حول هذه المناقشة وبصورة موسعة راجع Girshick Rubin Sitgreaves سنة (1955) .

مثال 3C

اجراءات مقارنة عمليات بواسون :

افرض ان $N(\cdot)$ و $N'(\cdot)$ عبارة عن عمليتين مستقلتين لبواسون ولكل منهما معدل متوسط يساوي ν و ν' على التوالي .

باستخدام نظرية 3A نستطيع ان نختبر اذا كان $\nu = \nu'$ افرض ان n_1 ، n_2 عددان صحيحان وان W_{n_1} عبارة عن زمن الانتظار الى وقوع الحادثة n_1 في سلسلة من الحوادث التي لها عملية عد $N(\cdot)$ وافرض ان W_{n_2}' عبارة عن زمن الانتظار الى وقوع الحادثة n_2 في سلسلة من الحوادث التي لها عملية عد $N'(\cdot)$. ان $2\nu W_{n_1}$ ، $2\nu' W_{n_2}'$ عبارة عن متغيرين عشوائيين موزعين حسب توزيع χ^2 بدرجات حرية تساوي $2n_1$ ، $2n_2$ على التوالي . وفقا للافتراض القائل بان $\nu = \nu'$ ستكون النسبة $n_2 W_{n_1}/n_1 W_{n_2}'$ موزعة حسب توزيع F بدرجات حرية تساوي $2n_1$ ، $2n_2$ للبسط والمقام على التوالي من هذه الحقيقة يمكن ان نحصل على اختبار الاهمية للافتراض $\nu = \nu'$ الخطوة الاهم في هذا السياق هو اختبار هل ان لسلسلة حوادث بواسون المختلفة نفس المتوسط ام لا . للحصول على تمارين توضيحية لهذا السياق ، راجع Maguire ، Pearson Wynn (1952) اما الاساليب الاخرى لتقدير واختبار الفرضيات التي تخص النسبة ν/ν' فستجدها في كتاب Birnbaum (1953 ، 1954) .

مكملات :

اختبار العمر .

نستطيع ان نعتبر توقف المركبات الالكترونية عن العمل عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة تساوي $1/\theta$ ويجب ان تحدد من التجربة احدى اساليب تقدير المعلم θ كما يلي :

اختر حجم عينه مناسبا وليكن n ، حيث n مركبة في حالة عمل في نفس الوقت ثم تستمر هذه المركبات في العمل الى ان تحصل على r مركبة توقفت عن العمل افرض ان W_j عبارة عن زمن الانتظار الى ان يقع العطب رقم j حيث $j = 1, \cdots, r$ افرض ان $T_1, \cdots, T_r$ عبارة عن الازمنة المتتابعة بين توقفات المركبة عن العمل (اي ان $T_1 = W_1$, $T_j = W_j - W_{j-1}$ عندما $j \geq 2$) . نبرهن الصيغ الاتية :

(المناقشة الكاملة لخطوات اختبار العمر تجدها في كتاب B. Epstein المعنون الاساليب الاحصائية لاختبار العمر . اوراجع كتاب نفس المؤلف سنة [1960]) .

3A - T_j موزع حسب التوزيع الاسي بمتوسط يساوي $\theta/(n-j+1)$ عندما $j = 1, \cdots, r$

3B - استقلالية $T_1, \cdots, T_r$

3C - اذا كانت $V_r = \sum_{j=1}^{r} W_j + (n-r) W_r = \sum_{j=1}^{r} (n-j+1) T_j$

فان $2V_r/\theta$ موزعة حسب توزيع χ^2 بدرجات حرية $2r$.

3D - V_r/r عبارة عن تقدير ل θ غير منحاز بمعنى ان

$$E\left[\frac{1}{r} V_r\right] = \theta$$

3E - برهن كيف يمكن استخدام 3C لتكوين فترة ثقة ل θ ذات - جانبين two-sided بمستوى اهمية significance يساوي $1-\alpha$.

3F - افرض وضع 7 مركبات الكترونية لنوع معين في حالة عمل الى ان يتم توقف 4 مركبات منها عن العمل ان الفترة الزمنية الى ان تحصل التوقفات الاولى . الثانية . الثالثة . الرابعة تساوي 23.5 ، 52.8 ، 72.0 ، 158.8 ساعة على التوالي . اوجد تقديراً لمتوسط عمر المركبة θ باستخدام (i) نقطة تقدير (ii) فترة ثقة لمستوى اهمية 90% .

توزيع ازمنة الوصول لعملية بواسون غير المتجانسة :-

اعطيت حوادث يكون وقوعها حسب عملية بواسون غير المتجانسة بدالة القيمة وسطية مستمره $m(t)$. عرف ازمنة الوصول المتتابعة $T_1, T_2, \cdots$ وازمنة الانتظار المتتابعة $W_1, W_2, \ldots$ كمايلي T_1 عبارة عن الزمن من صفر الى وقوع الحادثة الاولى T_n عبارة عن الزمن من وقوع الحادثة $(n-1)$ الى وقوع الحادثة n ، W_n عبارة عن الزمن من صفر الى وقوع الحادثة n
اثبت عندما $t > 0$ مايلي :

$$f_{T_1}(t) = e^{-m(t)}\,\nu(t); \qquad -3G$$

$$f_{T_2|T_1}(t \mid s) = e^{-m(t+s)+m(s)}\,\nu(t+s); \qquad -3H$$

$$f_{T_2}(t) = \int_0^\infty e^{-m(t+s)}\,\nu(t+s)\,\nu(s)\,ds; \qquad -3I$$

$$f_{W_n}(t) = e^{-m(t)}\,\frac{\{m(t)\}^{n-1}}{(n-1)!}\,\nu(t); \qquad -3J$$

$$1 - F_{T_k|W_{k-1}}(t \mid s) = e^{-m(s+t)+m(s)}; \qquad -3K$$

$$1 - F_{T_k}(t) = \int_0^\infty e^{-m(t+s)}\,\frac{\{m(s)\}^{k-2}}{(k-2)!}\,\nu(s)\,ds,\ k \geq 2. \qquad -3L$$

التمارين :

3.1 وصول الزبائن الى مكان خدمي يكون عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة 30 بالساعة . ما هو احتمال كون ازمنة الوصول المتتابعة كما يلي :

(i) اكثر من 2 دقيقة ؟

(ii) اقل من 4 دقائق ؟

(iii) بين دقيقة وثلاث دقائق ؟

3.2 في احدى تجارب حساب اشعة α-ray المنبعثة من مصدر اشعاعي بكثافة ثابتة حيث تم عد 18,000 شعاع من اشعة α خلال مدة 100 ساعة من المشاهدة المستمرة .تسجل ازمنة وصول اشعة α على شريط بحيث يمكن تحديد عدد الأشعة المسجلة في كل فترة زمنية ذات طول يساوي 1- دقيقة .

في كل فترة زمنية ذات طول يساوي(1 -) دقيقة .

(i) عندما $k = 0, 1, 2, 3, 4$ اوجد عدد الفترات المتوقعة ذات الطول 1 دقيقة

والتي تحتوي على k من اشعة α فقط . بافتراض ان انبعاث اشعة α من المصدر الاشعاعي حسب عملية بواسون بمعدل متوسط يساوي متوسط عدد اشعة α المشاهدة في فترة ذات طول 1 دقيقة .

(ii) عند ما $k=0, 1, 2, 3, 4$ اوجد العدد المتوقع لازمنة الوصول للمشاهدة اعتبارا بين $10k$ ثانية و $10(k+1)$ ثانية .

3.3 – يسجل عداد جزيئات نوويه معين كل جزيئة ثانية . تصل اليه . افرض ان الجزيئات تصل حسب عملية بواسون بمعدل متوسط 4 في الدقيقة . افرض ان T عبارة عن الفترة الزمنية (مقاسة بالدقائق) بين جزيئتين متتابعتين يتم تسجيلهما . اوجد :

(i) دالة كثافة احتمال T ، (ii) $P[T \geq 1]$ ، (iii) $E[T]$ ، $\text{Var}(T)$.

3.4 – اعد حل التمرين 3.3 وفقا لافتراض كون العداد يسجل الجزيئة الرابعة فقط .

3.5 – يكون بكاء طفل ما حسب عملية بواسون بمعدل متوسط 12 مرة كل ساعة . اذا كانت استجابة والديه لبكائه في (i) المرة الثانية (ii) المرة الثالثة . فما هو احتمال ان يكون طول الفترة الزمنية بين استجابة والدي الطفل والاستجابة الثانية هو عشر دقائق

3.6 – يسجل عداد الجزيئات النووية الجزيئة الثانية التي تصل الى العداد افترض ان الجزيئات تصل حسب عملية بواسون بمعدل وسط يساوي 2 بالدقيقة . افرض ان $N(t)$ تمثل عدد الجزيئات المسجلة خلال الدقائق الاولى بافتراض ان العداد يبدأ بتسجيل الجزيئة الثانية التي ستصل ..

اوجد (i) $P[N(t) = n]$ عندما $n = 0, 1, \cdots$ ، (ii) $E[N(t)]$.

3.7 – التوزيع الهندسي

مصدر اشعاعي معين يتكون من مادتين مشعتين حيث كل من المادتين يبث ، اشعة α واشعة β على التوالي .يفترض ان يكون اشعاع المادتين بصورة مستقلة علم ان معدل وسط انبعاث اشعة α و β يساوي μ ، ν على التوالي .

اثبت ان احتمال مشاهدة k من اشعة β خلال الفترة الزمنية بين تسجيل جزيئتين متعاقبتين من اشعة α يساوي $\frac{\mu}{\mu+\nu}\left(\frac{\nu}{\mu+\nu}\right)^k$ حيث $k = 0, 1, \cdots$

3.8 – تبين ان المدة الزمنية بين الحادثة الاولى والحادثة رقم 50 في سلسلة من انفجارات مناجم الفحم الانكليزي تساوي 7,350 يوماً افرض ان الانفجارات عبارة عن

حوادث من نوع بواسون . اوجد تقدير لمعدل الانفجارات الحاصلة بواسطة (i)
نقطة التقدير (ii) فترة الثقة .

3.9-تبين ان المدة الزمنية بين الحادثة الاولى والحادثة رقم 54 في سلسلة 108 من انفجارات مناجم الفحم الانكليزي تساوي 8,042 يوماً (راجع Maguire Pearson, ، Wynn سنة [1952] ص 214) بينما كانت الفترة الزمنية بين الحادثة 55 والحادثة 108 تساوي 16,864 يوماً . اذا افترضنا ان معدل حدوث الانفجار في كل من الفترتين كمية ثابتة ويساوي ν_1 ، ν_2 على التوالي .اوجد اختبار F للفرضية $\nu_1=\nu_2$. هل لقيمة $F=16,864/8,042=2.10$ تأثير عند مستوى معنوية يساوي 1% ؟

4-4 التوزيع المنتظم لازمنة الانتظار:

عملية بواسون :

يطلق على عملية بواسون غالبا بالعملية العشوائية او النموذج الكامل العشوائية لانه يمثل توزيعاً لعدد لامحدود من النقاط العشوائية ضمن فترة لامحدودة من صفر الى ∞ . النظرية الاتية تتضمن بصورة دقيقة ماجاء اعلاه .

نظرية : 4A

افرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون بكثافة تساوي ν . وفقا للشرط $N(T)=k$ فان الازمنة k . $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k$ في الفاصلة صفر الى T التي تقع عندها الحوادث عبارة عن متغيرات عشوائية لها نفس التوزيع فيما اذا كانت رتب احصائية نسبة الى k. من المتغيرات العشوائية المستقلة $U_1, \cdots, U_k$ الموزعة بصورة منتظمة في الفاصلة صفر الى T . نطلق على $\tau_1, \cdots, \tau_k$ بانها الرتب الاحصائية نسبة الى $U_1, \cdots, U_k$. اذا كانت τ_1 اصغر قيمة من قيم $U_1, \cdots, U_k$، τ_2 اصغر قيمة ثانية من قيم $U_1, \cdots, U_k$ وهكذا بالنسبة الى بقية المتغيرات . بحيث يكون τ_k اكبر قيمة بين قيم $U_1, \cdots, U_k$.

ملاحظة :

يمكن القول بان الازمنة $\tau_1, \cdots, \tau_k$ التي تحدث عندها الحوادث وفقا للشروط

القائلة بان k حادثة قد وقعت خلال الفاصلة من صفر الى T ، وتعتبر هذه الحوادث عبارة عن متغيرات عشوائية غيرمرتبة . وانها موزعة بصورة مستقلة ومنتظمة ضمن الفاصلة صفر الى T .

يجب ان نلاحظ ان المتغير العشوائي τ_k الذي يمثل زمن حدوث الحادثة وان المتغير العشوائي W_k الذي يمثل زمن الانتظار الى ان تحدث الحادثة k عبارة عن رموز مختلفة لنفس المفهوم .

البرهان :

نلاحظ اولا اذا كانت $U_1, \cdots, U_k$ موزعة بصورة منتظمة ضمن الفاصلة صفر الى T فان لهذه المتغيرات دالة كثافة احتمال مشتركة تكون كما يلي :

$$f_{U_1,\ldots,U_k}(u_1, \cdots, u_k) = \frac{1}{T^k} \quad \text{اذا كان} \quad 0 \le u_1, \cdots, u_k \le T \tag{4.1}$$

صفر = ماعدا ذلك

ان للرتب الاحصائية $\tau_1, \cdots, \tau_k$ نسبة الى $U_1, \cdots, U_k$ دالة كثافة احتمال مشتركة كما يلي

$$f_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(t_1, \cdots, t_k) = \frac{k!}{T^k}, \; 0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le T \tag{4.2}$$

$= 0$ ماعدا ذلك

ان الاحتمال المشروط ، اذا علمت بحدوث k حادثة في الفاصلة $[0,T]$ اي حدوث حادثة واحدة فقط في كل من الفواصل الجزئية غيرالمشتركة $[t_1, t_1 + h_1], \ldots, [t_k, t_k + h_k]$ من الفاصلة $[0,T]$ وعدم حدوث اي حادثة في اي مكان آخر، يساوي

$$\frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdots \lambda h_k e^{-\lambda h_k} e^{-\lambda(T-h_1-\ldots-h_k)}}{\dfrac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^k}{k!}} = \frac{k!}{T^k}\{h_1 h_2 \cdots h_k\}. \tag{4.3}$$

بالرموز، اذا كانت $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k$ عبارة عن الازمنة التي تحدث عندها k حادثة فان

$$P[t_1 \le \tau_1 \le t_1 + h_1, \cdots, t_k \le \tau_k \le t_k + h_k \mid N(T) = k] = \frac{k!}{T^k} h_1 \cdots h_k. \tag{4.4}$$

تساوي الجهة اليسرى للمعادلة 4.4 بصورة تقريبية باستخدام تعريف دالة كثافة الاحتمال مايلي :

$$f_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(t_1, \cdots, t_k)h_1h_2 \cdots h_k.$$

وهكذا برهنا ان الكثافة الاحتمالية المشتركة لازمنة الرتب $\tau_1, \cdots, \tau_k$ للحوادث تساوي $k!/T^k$ وهذا عبارة عن دالة كثافة الاحتمال المشتركة اذا كان $\tau_1, \cdots, \tau_k$ عبارة عن رتب احصائية نسبة الى n من المتغيرات العشوائية الموزعة بصورة منتظمة في الفاصلة صفر الى T . وهو المطلوب اثباته .

مثال 4A

احتبار فيما اذا كانت الحوادث من نوع بواسون . باستخدام نظرية 4A نحصل على اختبار لكون الحوادث المشاهدة عبارة عن حوادث من نوع بواسون ام لا . افترض . تمت مشاهدة العملية ضمن فترة طولها T حيث حدثت خلالها n حادثة .

افترض ان تسجيل الحوادث n سيكون بطريقة عشوائية (اي – طريقة لاتكون على اساس تسلسل الحدوث) . عندما $j = 1, \cdots, n$ افرض ان U_j تمثل زمن حدوث الحادثة j (مقاسة من بداية فترة المشاهدة) . اذا كان وقوع الحوادث حسب عملية بواسون فان المتغيرات العشوائية $U_1, \cdots, U_n$ مستقلة وموزعة بصورة منتظمة ضمن الفاصلة صفر الى T احدى طرق اختبار كون المتغيرات العشوائية من نوع بواسون هو اجراء اختبار هل ان المشاهدات $U_1, \cdots, U_n$ مستقلة وموزعة بصورة منتظمة ضمن الفاصلة صفر الى T . لانجاز الاختبار الاخير يمكننا ان نستخدم اختبار كولموكروف – سمرنوف او اختبار كريمر Cramér (راجع بند 3-5) او حسب نظرية الحد المركزية اذا كانت قيم n كبيرة فان مجموع

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \tag{4.5}$$

من المتغيرات العشوائية المستقلة ، حيث كل منها موزع حسب التوزيع المنتظم ضمن الفاصلة صفر الى T يمكن اعتباره كالتوزيع الطبيعي بمتوسط

$$E[S_n] = nE[U_1] = n\frac{T}{2} \tag{4.6}$$

وتباين

$$\mathrm{Var}[S_n] = n\,\mathrm{Var}[U_1] = n\frac{T^2}{12}. \tag{4.7}$$

اذا شاهدنا خلال $T=10$ دقيقة $n = 12$ حادثة فان المجموع S_{12} لازمنة وقوع الحوادث عبارة عن توزيع طبيعي (بصورة تقريبية) بمتوسط يساوي 60 وانحراف قياس يساوي 10 .

اما اذا حققت S_{12} المتباينة

$$60 - (1.96)10 \leq S_{12} \leq 60 + (1.96)10, \tag{4.8}$$

فاننا سنقبل الافتراض الاحصائي القائل بان الحوادث المشاهدة من نوع بــواسون .

يقال ان لهذا الاختبار مستوى معنوية تساوي 95% . ونقصد بهذا اذا كانت الحوادث عبارة عن نوع بواسون فاننا سنقبل الفرضية القائلة بان الحوادث عبارة عن نوع بواسون باحتمال يساوي 95% . راجع كتاب Chapman (1958) ص 667 لدراسة خواص هذا الاختبار .

البرهان الاخر لنظرية 3A

باستخدام نتائج النظرية 4A الموضحة في المكملة 4A نستطيع ان نبرهن نظرية 3A بصورة دقيقة كما يلي :

ثبت قيم n ، $t_1, \cdots, t_n$ حيث $t > 0$ افرض ان

$$G(t) = P[T_1 > t_1, \cdots, T_n > t_n \mid W_{n+1} = t] \tag{4.9}$$

يمكن ان نثبت باستخدام المعادلة 3.1 والمكملة 4A وباستخدام البرهان الموجود في كتاب الاحتمالات الحديثة ص 304 الى ص 306 . عندما $t > t_1 + \cdots + t_n$ ان

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{n!}{t^n} \int_{t_1}^{t-t_2-\cdots-t_n} dx_1 \int_{x_1+t_2}^{t-t_3-\cdots-t_n} dx_2 \int_{x_{n-1}+t_n}^{t} dx_n \\ &= \left[1 - \frac{t_1 + \cdots + t_n}{t}\right]^n . \end{aligned} \tag{4.10}$$

يمكن التعبير عن 4.10 كما يلي : اذا جزأنا خطاً مستقيماً ذا طول يساوي t الى $(n+1)$ جزء وذلك باختيار n نقطة بصورة عشوائية على الخط . فان الاحتمال $G(t)$

لكون طول الجزء j اكبر من t_j يساوي الصيغة الاخيرة في المعادلة 4.10 في ضوء المعادلتين 3.9 4.10 نحصل على :

$$P[T_1 > t_1, \cdots, T_n > t_n] = \int_0^\infty G(t) f_{W_{n+1}}(t)\, dt$$
$$= \int_{t_1+\cdots+t_n}^\infty e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^n}{n!} \left(1 - \frac{t_1 + \cdots + t_n}{t}\right)^n \nu\, dt$$
$$= e^{-\nu(t_1+\cdots+t_n)}$$

وهذا هو البرهان المطلوب للمعادلة 3.16 وكذلك للنظرية 3A

المكملات :

4A - التوزيع المنتظم لازمنة الانتظار $W_1, W_2, \cdots, W_{n-1}$ اذا علمت ان $W_n = t$ افرض ان W_n عبارة عن زمن الانتظار الى وقت وقوع الحادثة n لعملية بواسون . اثبت ان لازمنة الانتظار $W_1, \cdots, W_{n-1}$ وفقا للشرط $W_n = t$ نفس التوزيع كما لوكانت رتب احصائية نسبة الى $(n-1)$ متغير عشوائي مستقل $U_1, \cdots, U_{n-1}$ موزعة بصورة منتظمة ضمن الفاصلة $(0, t)$.

4B - توزيع ازمنة الوصول ، اذا علمت ان عدد الوحدات القادمة سيكون ضمن فترة معينة لعملية بواسون غير المتجانسة . نفرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون بدالة قيمة وسطية مستمرة $m(t)$. اثبت ان الازمنة $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k$ في الفاصلة $(0,t]$ التي تحدث عندها المتغيرات العشوائية وفقا للشروط $N(t) = k$ لها نفس التوزيع فيما اذا كانت رتب احصائية نسبة الى k متغيرعشوائي مستقل $U_1, \cdots, U_k$ بدالة توزيع مشتركة

$$F_{U_j}(u) = \frac{m(u)}{m(t)}, \qquad 0 \leq u \leq t$$

4C تقدير واختبار الفرضية التي تخص دالة القيمة الوسطية لعملية بواسون

نفرض ان k من الحوادث شوهدت في الفاصلة $(0,T]$ " حادثة عند الازمنة $\tau_1, \cdots, \tau_k$. اثبت ان الحصول على اختبار الفرضية القائلة بان الحوادث تحدث

حسب عملية بواسون بدالة قيمة وسطية $m(t)$ يكون باستخدام اما اختبار كولمو كروف – سمرنون اواختباركريمر – فون – مايس المعرف في البند 3-5 عندما

$$n = k, F_n(x) = \frac{N(x)}{N(T)}, F(x) = \frac{m(x)}{m(T)}$$

اثبت بصورة خاصة انه يمكن كتابة احصائية كريمر – فون مايس كما يلي :

$$W_n^2 = k \int_0^t \left[\frac{N(u)}{N(t)} - \frac{m(u)}{m(t)}\right]^2 \frac{dm(u)}{m(t)}$$

$$= \frac{1}{12k} + \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{m(\tau_j)}{m(t)} - \frac{2j-1}{2k}\right]^2.$$

تمارين :

4.1 – لاحظ بائع صحف ان وصول الزبائن يكون غير منتظم ويكون حسب عملية بواسون وبمعدل زبون واحد كل دقيقة . في احد الايام طلب من احد اصدقائه القيام ببيع الصحف لمدة خمس دقائق حتى ينجز بعض اعماله التي تتطلب حضوره . بعد ان رجع الى صديقه بان عدد الزبائن خلال فترة

خمس دقائق كانوا اربعة زبائن فقط . قال بائع الصحف وكيف ذلك ؟ هل يمكنك وصفهم لي كي اعلمك باوقات وصولهم . احسب احتمال مقدرته على تحديد اوقات وصولهم بافتراض ان قبول صحة ادعائه اذا كان ضمن فاصلة طولها 2 دقيقة .

4.2 – نفرض مشاهدة سلسلة من الحوادث لمدة 10 دقيقة ، وقد لاحظنا حدوث مرة عند الازمنة 0.20 , 0.33 , 0.98 , 2.02 , 3.92 , 4.12 , 5.74 , 6.42, 7.87, 8.49, 9.85, 9.94 .

استخدم احصائية على شكل المعادلة 4.5 لاختبار الفرضية القائلة بان الحوادث من نوع بواسون (عند مستوى معنوية 95%) .

4.3 – افرض ان r ، n $(r \leq n)$ عددان صحيحان وان t عبارة عن عدد حقيقي .

اثبت ان لزمن الانتظار الى وقوع الحادثة r دالة كثافة احتمال وفقا لشرط حدوث n حادثة من نوع (بواسون) خلال الزمن t :

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\frac{x}{t}\right)^{r-1}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-r}\frac{1}{t}, \ 0<x<t,$$

ولها متوسط

$$\frac{r}{n+1}t.$$

4-5 عمليات بواسون المصفاة FILTERED POISSON PROCESSES

يمكن استخدام عمليات بواسون المصفاة كنماذج لمختلف الظواهر العشوائية . يطلق على العمليات التصادفية بعملية بواسون المصفاة (ان هذا الرمز غير قياسي) اذا امكن اعتبار ظهورها من خلال العمليات الخطية على عملية بواسون . تقدم ذكر هذا النوع من العمليات في الفيزياء الضوضائية كنموذج للضوضاء الطلقية . استخدمت هذه العمليات بعد ذلك في بحوث العمليات كنموذج لعدد القنوات الخدمية المشغولة في نظام لعدد من القنوات الخدمية غير المحدودة . نوضح مفهوم التعريف بامثلة بحوث العمليات الاتية :

مثال : 5A

عدد القنوات المشغولة في نظام للاتصالات التلفونية :

نفرض ان مركز اتصال تلفوني يحتوي على عدد غير محدود من الخطوط التلفونية . كل نداء سيشغل قناة واحدة . نفترض ان النداءات تحدث في الازمنة $\tau_1, \tau_2, \cdots$ حيث ان $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$. نفترض ان وصول النداءات عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة ν ، Y_n تمثل المدة المستغرقة للنداء الواصل في الزمن τ_n . نفترض ان $Y_1, Y_2, \ldots$ عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة موزعة بصورة متماثلة . $X(t)$ عدد القنوات المشغولة في الزمن t والتي يجب علينا تحديدها . احدى طرق تمثيل $X(t)$ هي بعدد الازمنة τ_n حيث $\tau_n \leq t \leq \tau_n + Y_n$ وتكتب هذه الصيغة بالرموز كما يلي :

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} w_0(t-\tau_n, Y_n), \tag{5.1}$$

حيث ان   دالة معرفة لقيمة   وكما يلي :

$$w_0(s,y) = 1 \quad , \quad 0 \leq s \leq y$$
$$= 0 \quad , \quad s < 0 \quad \text{او} \quad s > y$$

ان $N(t)$ عدد النداءات في الفترة $(0,t]$

مثال 5B

عدد القنوات المشغولة في نظام انتظار يحتوي على عدد لامحدود من القنوات

نفرض ان وصول الزبائن الى نظام يحتوي على عدد لامحدود من القنوات في الازمنة $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ الزبون الواصل في الزمن τ_n يحتاج الى مدة عشوائية من الخدمة Y_n . افرض ان $X(t)$ تمثل عدد القنوات المشغولة في الزمن t .يمكن كتابة العمليــة التصادفية $X(t)$ على شكل المعادلة 5.1 .

مثال 5C

عدد العمال في نظام التامين :

افرض ان العمال يصابون بالحوادث في الازمنة $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ ان العامل الذي يصاب في الزمن τ_n لايستطيع العمل خلال مدة زمنية Y_n (عشوائية) حيث يستلم خلال تلك المدة مخصصات تأمين. افرض ان $X(t)$ تمثل عدد العمال الذين يستلمون مخصصات تأمين في الزمن t .يمكن ان تكتب العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ على شكل المعادلة 5.1 .

مثال 5D

عدد الجزيئات التي تغلق العداد paralyzable

افرض ان الجزيئات المنبعثة من مصدر اشعاعي تصل العداد في الازمنة $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ الجزيئة التي تصل العداد في الزمن τ_n تغلق العداد لمدة زمنية عشوائية Y_n اي ان الجزيئة التي تصل العداد في الزمن $(\tau_n, \tau_n + Y_n]$ سوف لاتعد .افرض ان $X(t)$ تمثـــل

عدد الجزيئات المسببة انغلاق العداد في الزمن t (لاحظ ان العداد يكون غير منغلق في الزمن t اذا كان $X(t) = 0$ والعكس صحيح) .

تحقق العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ المعادلة 5.1 .

يطلق على العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ بانها عملية بواسون المصفاة $t \geq 0$ اذا امكن تمثيلها لقيم t كما يلي :

$$X(t) = \sum_{m=1}^{N(t)} w(t,\tau_m,Y_m) \qquad (5.2)$$

حيث ان (i) $\{N(t), t \geq 0\}$ عملية بواسون بكثافة ν ، (ii) $\{Y_n\}$ تتابع من المتغيرات العشوائية المستقلة الموزعة بصورة متماثلة كالمتغير العشوائي Y وانها مستقلة عن $\{N(t), t \geq 0\}$ ، (iii) $w(t,\tau,y)$ دالة لثلاث متغيرات حقيقية . تسمى بدالة الاستجابة *response function* نوضح المعادلة 5.2 كما يلي : اذا كان τ_m يمثل زمن حدوث حادثة ، فان Y_m يمثل سعة الاشارة المتعلقة بتلك الحادثة . $w(t,\tau_m,y)$ تمثل القيمة عند الزمن t لاشارة ذات كمية y متكونة عند الزمن τ_m

وان $X(t)$ تمثل القيمة عند الزمن t لمجموع الاشارات المتكونة بسبب حدوث الحوادث في الفاصلة $(0,t]$.

اذا اردنا تحديد عملية بواسون المصفاة يجب ان نذكر ما يلي :

(i) الكثافة ν لعملية بواسون تحت الدراسة (ii) التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات العشوائية $\{Y_n\}$ (iii) دالة الاستجابة .

دوال الاستجابة المثالية **Typical response functions** بصورة عامة

$$w(t,\tau,y) = w_0(t-\tau,y) \qquad (5.3)$$

لدالة ما $w_0(s,y)$ بعبارة اخرى . التأثير عند الزمن τ للاشارة الحادثة عند الزمن t يعتمد على الفرق الزمني $(t-\tau)$ فقط بين t ، τ .

ان الدوال

$$w_0(s,y) = 1 \quad \text{for} \quad 0 < s < y \qquad (5.4)$$
$$= 0 \quad \text{ماعدا ذلك}$$

$$w_0(s,y) = y - s \quad \text{for} \quad 0 < s < y \qquad (5.5)$$
$$= 0 \quad \text{ماعدا ذلك}$$

تؤدي الى ظهور عمليات تصادفية تحدث بكثرة في العلوم الادارية (راجع الامثلة 5A الى 5C)

تحقق بصورة عامة الدوال ذات الشكل .

$$w_0(s,y) = yw_1(s), \tag{5.6}$$

الشرط الاتي

$$w_1(s) = 0 \quad \text{for} \quad s < 0, \tag{5.7}$$

حيث ان $w_1(s)$ دالة مناسبة .

ندرس هذه الدوال غالباً في نماذج الضوضاء الطلقية . دالة مهمة اخرى هـي :

$$\begin{aligned} w(s) &= 1 \quad \text{اذا كان} \quad s \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{اذا كان} \quad s < 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

والتي تماثل عمليات بواسون المركبة (كما معرفة في البند 2-4)

نظريــــة : 5A

افرض ان $X(t)$ عملية بواسون المصفاة المعرفة بالمعادلة 5.2 . ان لاي عدد موجب t وعدد حقيقي u فان :

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left\{\nu \int_0^t E[e^{iuw(t,\tau,Y)} - 1]\, d\tau\right\}, \tag{5.9}$$

وان لاي $t_2 > t_1 \geq 0$ واي عددين حقيقيين u_1 , u_2 فان

$$\begin{aligned} \varphi_{X(t_1),X(t_2)}(u_1,u_2) = \exp\Big\{\nu \int_0^{t_1} & E[e^{i(u_1w(t_1,\tau,Y)+u_2w(t_2,\tau,Y))} - 1]\, d\tau \\ & + \nu \int_{t_1}^{t_2} E[e^{iu_2w(t_2,\tau,Y)} - 1]\, d\tau\Big\} \cdot \end{aligned} \tag{5.10}$$

اذا كان لجميع قيم τ , $E[w^2(t,\tau,Y)] < \infty$ فان لـ $X(t)$ عزوماً اولية وثنائية محدودة كما يلي :

$$E[X(t)] = \nu \int_0^t E[w(t,\tau,Y)]\, d\tau, \tag{5.11}$$

$$\mathrm{Var}[X(t)] = \nu \int_0^t E[w^2(t,\tau,Y)]\, d\tau, \tag{5.12}$$

$$\mathrm{Cov}[X(t_1), X(t_2)] = \nu \int_0^{\min(t_1,t_2)} E[w(t_1,\tau,Y)w(t_2,\tau,Y)]\, d\tau. \tag{5.13}$$

قبل ان نبرهن نظرية 5A ندرس نتائجها .

مثال 5E

عدد القنوات المشغولة ، عدد الوحدات المادية للخدمة المشغولة .. الخ موزعة كتوزيع بواسون .

الفرض ان $X(t)$ تمثل عدد القنوات المشغولة في مركز الاتصالات التلفونية حيث عدد القنوات غير محدود ، عدد الوحدات المأدية للخدمة عبارة عن نظام خدمي يحتوي على عدد غير محدود من الوحدات وعمليات مشابه الى (الأمثلة 5A الى 5C) افترض ان وصول النداءات اوالزبائن عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة ν وان أزمنة الخدمة مستقلة وموزعة بصورة متماثلة كالمتغير العشوائي Y المستمر غير السالب . ان $X(t)$ عملية بواسون المصفاة التي تعطي دالة استجابتها بالمعادلتين 5.3 5.4 . من النظرية 5A نحصل على دالة خاصية . ذات بعد واحد كما يلي :

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left\{\nu \int_0^t E[e^{iuw_0(t-\tau,Y)} - 1]\, d\tau\right\}. \tag{5.14}$$

اذا عوضنا عن $s = t - \tau$ نحصل على :

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left\{\nu \int_0^t E[e^{iuw_0(s,Y)} - 1]\, ds\right\}. \tag{5.15}$$

ان $\{e^{iuw_0(s,Y)} - 1\}$, s متغير عشوائي عندما تكون قيمة s مثبتة ، ويساوي أما صفراً او $e^{iu} - 1$ انها تساوي القيمة الاخيرة عندما $Y > s$. اذن

$$\begin{aligned} E[e^{iuw_0(s,Y)} - 1] &= (e^{iu} - 1)P[Y > s] \\ &= (e^{iu} - 1)[1 - F_Y(s)] \end{aligned}$$

وانما

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left\{(e^{iu}-1)\nu\int_0^t [1-F_Y(s)]\,ds\right\}. \qquad (5.16)$$

من المعادلة 5.16 نحصل على ان $X(t)$
موزعة حسب توزيع بواسون وبمتوسط يساوي

$$\nu\int_0^t [1-F_Y(s)]\,ds. \qquad (5.17)$$

يمكن ان نثبت ان للمتغير العشوائي Y ذي المتوسط المحدود

$$E[Y] = \int_0^\infty [1-F_Y(s)]\,ds - \int_{-\infty}^0 F_Y(s)\,ds. \qquad (5.18)$$

نحصل عندما تكون قيم كبيرة على $X(t)$ موزعة حسب توزيع بواسون بمتوسط يساوي $\nu E[Y]$

تكتب هذه القيمة باسلوب ذو معنى اكثر وكما يلي : بعد ان يكون نظام الانتظار ذو العدد اللامحدود من القنوات في حالة عمل لمدة طويلة فانعدد الوحدات المأدية للخدمةوالمشغولة ستكون موزعة حسب توزيع بواسون بمعلم
ρ = (متوسط عدد الوحدات المأدية للخدمة والمشغولة) =

$$= \frac{\text{متوسط زمن خدمة الزبون}}{\text{متوسط زمن وصول الزبون}}$$

احتمال عدم وجود قناة مشغولة يساوي

$$P[X(t)=0] = e^{-\rho}. \qquad (5.19)$$

نستخدم المعادلة 5.13 للحصول على تغاير $X(t)$.

عندما $s < t$.

$$\begin{aligned}\text{Cov}[X(s), X(t)] &= \nu\int_0^s E[w_0(s-\tau,Y)w_0(t-\tau,Y)]\,d\tau \\ &= \nu\int_0^s E[w_0(u,Y)w_0(u+t-s,Y)]\,du.\end{aligned}$$

عندما تكون u مثبتة فان $w_0(u,Y)w_0(u+t-s,Y)$ تساوي صفراًاو تساوي 1
عندما $Y > t-s+u$. اذن عندما $s < t$ فان

$$\text{Cov}[X(s), X(t)] = \nu \int_0^s [1 - F_Y(t-s+u)]\, du. \qquad (5.20)$$

عندما تكون ازمنة الخدمة موزعة حسب التوزيع الاسي بمتوسط يساوي $1/\mu$ فان

$1 - F_Y(y) = e^{-\mu y}$ وان

$$\text{Cov}[X(s), X(t)] = \frac{\nu}{\mu} \{e^{-\mu(t-s)} - e^{-\mu t}\} \quad \text{for} \quad s < t. \qquad (5.21)$$

يهمنا في هذا المجال بصورة خاصة دراسة التغاير عند الزمنين s . $s+v$ حيث v زمن معلوم :

$$\text{Cov}[X(s), X(s+v)] = \frac{\nu}{\mu} \{e^{-\mu v} - e^{-\mu(s+v)}\}. \qquad (5.22)$$

اذا جعلنا s تقترب الى ∞ في المعادلة 5.22 فان للغاية الاتية قيمة حقيقية

$$\underset{s\to\infty}{\text{غا}}\ \text{Cov}[X(s), X(s+v)] = \frac{\nu}{\mu} e^{-\mu v} \quad \text{for} \quad v \geq 0. \qquad (5.23)$$

نستطيع ان نعتبر عدد القنوات المشغولة $X(t)$ في نظام انتظار لمدة طويلةمن الزمن بانه عبارة عن عملية تصادفية ذات تغاير ثابت
(كما معرفة في الفصل 3) بمتوسط ذي كمية ثابتة :

$$E[X(t)] = \frac{\nu}{\mu} \qquad (5.24)$$

ودالة تغاير

$$R(v) = \frac{\nu}{\mu} e^{-\mu|v|}, \qquad (5.25)$$

بافتراض ان ازمنة الخدمة موزعة حسب التوزيع الاسي بمتوسط $1/\mu$ وان الوصول يكون من نوع بواسون بكثافة ν .
تمرين للقارئ : في حالة التوزيع العام لزمن الخدمة اثبت ما يلي :

$$\underset{s\to\infty}{\text{غا}}\ \text{Cov}[X(s), X(s+v)] = \nu E[Y]\left\{1 - \int_0^v \left(\frac{1-F_Y(u)}{E[Y]}\right) du\right\} \cdot \qquad (5.26)$$

مثال 5F

عمليات الضوضاء الطلقية ونظرية كامبل (Campbell)

يقال ان العملية التصادفية $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ عبارة عن عملية ضوضاء طلقية اذا امكن تمثيلها بالموقع الابعد للنبضات المتكونة عند ازمنة عشوائية $\cdots \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \cdots$ ت يفترض ان يكون شكل جميع النبضات نفس الشكل $w(s)$ ولذلك سنكتب مايلي :

$$X(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(t - \tau_m). \tag{5.27}$$

يمكن اختيار اشكال النبضات عشوائيا بصوره عامة متكونة من الاشكال $w(s,y)$: معلمة بالمعلم y . نختار المعلم y في كل زمن τ_m ليمثل قيمة المتغير العشوائي Y_m وهكذا تعرف $X(t)$ بانها ابعد موقعا

$$X(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(t - \tau_m, Y_m). \tag{5.28}$$

نفترض ان حدوث الازمنة $\{\tau_m\}$ يكون حسب عملية بواسون بكثافة تساوي ν وان $\{Y_n\}$ عبارة عن تتابع من المتغيرات العشوائية المستقلة الموزعة بصورة متماثلة .

تؤدي العمليات العشوائية ذات الشكل المبين في المعادلتين 5.27 ، 5.28 دورا مهما في نظرية الضوضاء الطلقية في الانظمة الفيزيائية . بنفس اسلوب برهنة نظرية 5A يمكن ان نبرهن النتائج الاتية المتعلقة بالعملية $\{X(t), -\infty < t < -\infty\}$ المعرفة بالمعادلة 5.27 :

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left[\nu \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{iuw(s)} - 1\}\, ds\right] \tag{5.29}$$

$$E[X(t)] = \nu \int_{-\infty}^{\infty} w(s)\, ds, \tag{5.30}$$

$$\mathrm{Var}[X(t)] = \nu \int_{-\infty}^{\infty} w^2(s)\, ds, \tag{5.31}$$

$$\mathrm{Cov}[X(t), X(t+v)] = \nu \int_{-\infty}^{\infty} w(s)w(s+v)\, ds. \tag{5.32}$$

يطلق على المعادلات 5.30 الى 5.32 عادة بنظرية كامبل لابعد موقع للنبضات العشوائية . (راجع كتاب Rice [1944] للحصول على مراجع حول البحوث وتاريخ نظرية كامبل) .

لاجل توضيح استخدامات نظرية كامبل ، نجد متوسط ، تباين ، تغاير العمليـة التصادفية التي في شكل المعادلة 5.27 عندما

$$w(s) = \frac{2e}{T^2}s, \quad 0 \leq s \leq T \qquad (5.33)$$
$$= 0, \quad \text{ماعدا ذلك}$$

حيث e ، T كميتان ثابتتان معلمتان . (تصف هذه العملية التيار الكلي $X(t)$ المار خلال انبوب مفرغ في الزمن t ، نتيجة لمواقع نبضات التيار البعيدة المتكونة نتيجة لمرور الالكترونات في الكاثود الى الانود ، لكل الكترون شحنة e ويستغرق وقتاً يساوي T للمرور من الكاثود الى الانود (راجع كتاب Davenport و Root سنة 1958)
نحصل من نظرية كامبل على مايلي :

$$E[X(t)] = \nu \int_0^T \left(\frac{2es}{T^2}\right) ds = \nu e, \qquad (5.34)$$

$$\text{Var}[X(t)] = \nu \int_0^T \left(\frac{2es}{T^2}\right)^2 ds = \frac{4\nu e^2}{3T}, \qquad (5.35)$$

$$\text{Cov}[X(t), X(t+v)] = \frac{4\nu e^2}{3T}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{|v|}{T} + \frac{1}{2}\frac{|v|^3}{T^3}\right) \quad \text{for} \quad |v| \leq T$$
$$= 0, \quad \text{ماعدا ذلك} \qquad (5.36)$$

نوقشت اساليب الحصول على سعة توزيعات عمليات الضوضاء الطلقية بصورة موسعة في كتاب Gilbert و Pollak سنة 1960 .

مثال 5G

نماذج للاختلاف الداخل والتعجيل في حالة عشوائية :

نستطيع دراسة مختلف العمليات التصادفية التي قام بدراستها Mandelbrot (1960) و Good (1961) كنماذج للاختلاف الداخل والتعجيل في الحالة العشوائية وكانهـا عمليات بواسون المصفاة . نذكر اولاً النتائج الرياضية التي سنشرحها فيما بعد .
اعتبر عملية بواسون المصفاة $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ المعرفة كما يلي

$$X(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(t - \tau_m), \tag{5.37}$$

حيث $\{\tau_m\}$ عبارة عن ازمنة وقوع الحوادث من نوع بواسون بكثافة ν وان

$$\begin{aligned} w(s) &= c \mid s \mid^{-\beta} \quad \text{if} \quad s \geq 0 \\ &= -w(-s) \quad \text{if} \quad s < 0, \end{aligned} \tag{5.38}$$

حيث ان c ، β كميتان موجبتان ثابتتان . نلاحظ ادناه ان β تحقق الشرط $\beta > 1/2$.

تعطي دالة خاصية $X(t)$ بالصيغة

$$\begin{aligned} \varphi_{X(t)}(u) &= \exp\left\{\nu \int_{-\infty}^{\infty} [e^{iuw(t-\tau)} - 1]\, d\tau\right\} \\ &= \exp\left\{\nu \int_{-\infty}^{\infty} [e^{iuw(s)} - 1]\, ds\right\} \\ &= \exp\left\{2\nu \int_{0}^{\infty} [\cos uw(s) - 1]\, ds\right\} . \end{aligned} \tag{5.39}$$

نجد قيمة التكامل الاسي كما يلي . افترض ان$u > 0$. اذا افترضنا ان $y = ucs^{-\beta}$ او ان $s = (y/uc)^{-\alpha}$ حيث $\alpha = 1/\beta$ فان

$$\int_0^{\infty} \{\cos(ucs^{-\beta}) - 1\}\, ds = -u^{\alpha}\alpha c^{\alpha} \int_0^{\infty} y^{-\alpha-1}(1 - \cos y)\, dy.$$

يتقارب التكامل الاخير عندما تكون $0<\alpha<2$ فقط وهذا يعني $\beta > 1/2$. وهكذا ، اثبتنا ان دالة خاصية عملية بواسون المصفاة معادلة 5.37 مبينة كما يلي :

$$\varphi_{X(t)}(u) = e^{-k|u|^{\alpha}} \tag{5.40}$$

حيث $\alpha = 1/\beta$ ، $k = 2\alpha\nu\, c^{\alpha} \int_0^{\infty} y^{-\alpha-1}\, (1 - \cos y)dy$

تسمى دالة الخاصية التي تكون على شكل المعادلة 5.40 بدالة الخاصية المتوازيـــة حقيقياً *real stable* عندما تكون $0<\alpha<2$ (راجع Loève [1960]) .

عندما $\alpha>2$ فان الجهة اليمنى من المعادلة 5.40 ليست بدالة خاصية . في حالـــة كون $\alpha=1$ فان المعادلة 5.40 تكون دالة خاصية توزيع كوشي ، وعندما $\alpha=2$ فان المعادلة 5.40 تكون دالة خاصية التوزيع الطبيعي . تكون لدالة الخاصية عزوم ثنائية محدودة ، فقط في حالة كون $\alpha = 2$

هناك عدة طرق يمكن بها اعطاء تفسيرات فيزيائية لعملية بواسون المصفاة . معادلة 5.5.37 . مثلاً يمكن اعتبار الجزيئات الموزعة بصورة عشوائية على خط مستقيم (حسب عمليه بواسون بكثافة تساوي ν) . افرض ان قوة الجذب بين اية جزيئتين تساوي $cr^{-\beta}$ حيث c كمية موجبة ثابتة وان r المسافة بين الجزيئتين . ان $X(t)$ ستمثل القوة الكلية المتسببة على الجزيئة الموضوعة في الزمن t . بما ان القوة والتعجيل متساويان ، لحد عامل ثابت فاننا نستطيع ان نعتبر $X(t)$ بانها تعجيل الجزيئة الموضوعة في الزمن t . اطلق Good (1961) على هذا بانه تعجيل جزيئة في محيط عشوائي (لايخضع لقانون معين) ان المعادلة 5.40 تصف قانون احتمال التعجيل في الحالة العشوائية .

نستطيع تطوير نموذج التعجيل في الحالة العشوائية ليشمل الجزيئات الموزعة في الفضاء .

وبهذا ستشمل رسالة Holtzmark (راجع Chandrasekhar [1943] ص70) التي تتعلق بالقوة المؤثرة على النجوم نتيجة للجاذبية الحاصلة من النجوم المجاورة .

توسيع مفهوم عملية بواسون المصفاة :

من الممكن اعادة صياغة مفهوم عملية بواسون المصفاة كما يلي :

افرض ان $\{W(t,\tau), t \geq 0, \tau \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية وافرض ان

$$\varphi_{W(t,\tau)}(u) = E[\exp\{iuW(t,\tau)\}] \tag{5.41}$$

تمثل دالة خاصيه العملية اعلاه . افرض بعد ذلك ان

$$\{\{W_m(t,\tau), t \geq 0, \tau \geq 0\}, m = 1, 2, \cdots\}$$

عبارة عن تتابع من العمليات التصادفية المتماثلة التوزيع كالعملية $\{W(t,\tau), t \geq 0, \tau \geq 0\}$. افرض ان $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ عبارة عن ازمنة وقوع الحوادث من نوع بواسون بكثافة ν وافرض ان $N(t)$ عبارة عن عدد الحوادث التي حدثت في الفاصلة $(0,t]$. تعرف العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$

$$X(t) = \sum_{m=1}^{N(t)} W_m(t, \tau_m) \tag{5.42}$$

بانها عملية بواسون المصفاة (بالمعنى التوسيعي) اذا افترضنا ان جميع العمليات التصادفية $\{N(t), t \geq 0\}$ $\{W_m(t,\tau), t \geq 0, \tau \geq 0\}$ ، $m = 1, 2$ تكون مستقلة .

نبرهن ما يلي بنفس طريقة برهنة النظرية 5A

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left\{-\nu t + \nu \int_0^t \varphi_{W(t,\tau)}(u)\, d\tau\right\}, \tag{5.43}$$

$$E[X(t)] = \nu \int_0^t E[W(t,\tau)]\, d\tau, \tag{5.44}$$

$$\text{Var}[X(t)] = \nu \int_0^t E[W^2(t,\tau)]\, d\tau. \tag{5.45}$$

مثال 5-4

عمليات المجتمع مع وجود الهجرة

اذا هاجرت احدى الحيوانات المعينة التي تعود الى صنف ما الى منطقة اخرى في الزمن t ، فان عدد اجيال ذلك الحيوان والتي ستكون موجودة في تلك المنطقة في الزمن t عبارة عن متغير عشوائي $W(t,\tau)$ افترض عدم وجود حيوانات من الصنف في الزمن صفر ، وتمت الهجرة في الازمنة $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ والتي كانت من نوع بواسون بكثافة ν . افرض ان $W_m(t,\tau_m)$ ترمز لعدد اجيال الحيوان في الزمن t الذي هاجر الى المنطقة في الزمن τ_m . ان العدد الكلي $X(t)$ للحيوانات في تلك المنطقة في الزمن t يعطى بالمعادلة 5.42. بافتراض ان عمليات المجتمع تكون مستقلة نحصل على ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون المصفاة (بالمعنى الواسع) . بدلاً من كتابة دالة الخاصية سنكتب الدالة المولدة للاحتمال :

$$\psi_X(z;t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P[X(t) = n].$$

اذا علمنا بالدالة المولدة للاحتمال

$$\psi_W(z;t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P[W(t,\tau) = n]$$

فان

$$\psi_X(z;t) = \exp\left\{-\nu t + \nu \int_0^t \psi_W(z;t,\tau)\, d\tau\right\}. \tag{5.46}$$

كتطبيق لهذه النتيجة تجده في مثال 4B في الفصل السابع .

برهان نظرية 5A

لاجل برهنة النظرية نجد اولاً دالة الخاصية $E[\exp i\{u_1X(t_1) + u_2X(t_2)\}]$ يمكن ان نفترض ان لـ $w(t,\tau,u)$ الخاصية الاتية لاي

$$w(t,\tau,y) = 0 \qquad t < \tau,$$

لايوجد اي تأثير للاشارة الحادثة عند الزمن τ على الزمن السابق t . وهكذا يمكن كتابة $X(t)$ كما يلي :

$$X(t) = \sum_{m=1}^{\infty} w(t,\tau_m,Y_m),$$

$$u_1X(t_1) + u_2X(t_2) = \sum_{m=1}^{N(t_2)} g(\tau_m,Y_m),$$

بافتراض ان

$$g(\tau,y) = u_1w(t_1,\tau,y) + u_2w(t_2,\tau,y).$$

لايجاد قيمة دالة خاصية $X(t)$ نجد اولا مايلي :

$$\Phi = E[e^{iZ}],\ Z = \sum_{m=1}^{N(t_2)} g(\tau_m,Y_m).$$

لكل $t > 0$ عرف

$$\varphi(\tau) = E[e^{ig(\tau,Y)} - 1]. \tag{5.47}$$

نبرهن ان

$$\Phi = \exp\left\{\nu \int_0^{t_2} \varphi(\tau)\, d\tau\right\} \tag{5.48}$$

من هذا البرهان سنحصل على المعادلة 5.10 . لكي نبرهن معادلة 5.48 سنناقش طريقة واحدة من عدة طرق مختلفة . نكتب اولا

$$E[e^{iZ}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{iZ} \mid N(t_2) - N(0) = n]P[N(t_2) - N(0) = n]. \tag{5.49}$$

ان التوزيع المشروط للازمنة $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n \le t_2$ التي تقع عندها الحوادث اذا علمت بوقوع n حادثة فقط يساوي نفس توزيع المتغيرات العشوائية الرتبية نسبة الى n من المتغيرات العشوائية المستقلة الموزعة بصورة منتظمة ضمن الفاصلة من صفر الى t_2. يمكن ان نستنتج ان (كما مبين ادناه) ·

$$E[\exp.i\sum_{m=1}^{n} g(\tau_m,Y_m) \mid N(t_2) - N(0) = n]$$
$$= \{E[\exp ig(U,Y)]\}^n = \left\{\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} E[\exp ig(\tau,Y)]\, d\tau\right\}^n \tag{5.50}$$

حيث U موزعة توزيعا منتظما ضمن الفاصلة صفر الى t_2. من المعادلتين 5.49 , 5.50 نحصل على

$$\begin{aligned}
E[e^{iZ}] &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu t_2} \frac{(\nu t_2)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} E[e^{ig(\tau,Y)}]\, d\tau \right\}^n \\
&= e^{-\nu t_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \nu \int_0^{t_2} E[e^{ig(\tau,Y)}]\, d\tau \right\}^n \\
&= \exp \left\{ \nu \int_0^{t_2} (E[e^{ig(\tau,Y)}] - 1)\, d\tau \right\} \\
&= \exp \left\{ \nu \int_0^{t_2} \varphi(\tau)\, d\tau \right\}
\end{aligned}$$

وهو المطلوب اثباته بالنسبة للمعادلة 5.48

تجدر الاشارة الآن الى اعطاء تفصيلات اكثر حول اشتقاق المعادلة 5.50. افرض ان A عبارة عن حادثة ان $N(t_2) - N(0) = n$ وان

$$\varphi = E\left[exp\, i \sum_{m=1}^{n} g(\tau_m, Y_m) \mid A \right].$$

لاي عدد من الأعداد الحقيقيـــة $s_1, \cdots, s_n$ التي تحقق الشـــرط $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leq t_2$ نعرف ما يلي :

$$\varphi(s_1, \ldots, s_n) = E\left[\exp i \sum_{m=1}^{n} g(\tau_m, Y_m) \mid A, \tau_1 = s_1, \ldots, \tau_n = s_n \right].$$

يمكن ان نتحقق مما يلي :

$$\begin{aligned}
\varphi(s_1, \ldots, s_n) &= E\left[\exp i \sum_{m=1}^{n} g(s_m, Y_m) \mid A, \tau_1 = s_1, \ldots, \tau_n = s_n \right] \\
&= \prod_{m=1}^{n} E[\exp ig(s_m, Y)].
\end{aligned}$$

بعد ذلك ، يمكن ان نتحقق مما يلي :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \int_0^{t_2} ds_1 \int_{s_1}^{t_2} ds_2 \ldots \int_{s_{n-1}}^{t_2} ds_n \varphi(s_1, \ldots, s_n) f_{\tau_1, \ldots, \tau_n}(s_1, \ldots, s_n) \\
&= \frac{n!}{(t_2)^n} \int_0^{t_2} ds_1 \int_{s_1}^{t_2} ds_2 \ldots \int_{s_{n-1}}^{t_2} ds_n \varphi(s_1, \ldots, s_n) \\
&= \frac{1}{(t_2)^n} \int_0^{t_2} ds_1 \ldots \int_0^{t_2} ds_n \varphi(s_1, \ldots, s_n), \qquad (5.51)
\end{aligned}$$

لان $\varphi(s_1, \cdots, s_n)$ دالة متناظرة ، نحصل من المعادلة 5.51 مباشرة على المعادلة 5.50 .

نستخدم الحقائق الاتية لايجاد صيغ العزوم لـ $X(t)$.

$$iE[X(t)] = \frac{d}{du}\log\varphi_{X(t)}(0),$$
$$i^2\,\mathrm{Var}[X(t)] = \frac{d^2}{du^2}\log\varphi_{X(t)}(0),$$
$$i^2\,\mathrm{Cov}[X(t_1), X(t_2)] = \frac{\partial^2}{\partial u_1\,\partial u_2}\log\varphi_{X(t_1),X(t_2)}(0,0). \qquad (5.52)$$

المكملات :

5A — تعميم نظرية كامبل . تأمل العملية التصادفية ذات الشكل

$$X(t) = \sum_{-\infty<\tau_n<\infty} Y_n\, w(t-\tau_n),$$

حيث $\{\tau_n\}$ عبارة عن ازمنة وقوع الحوادث حسب عملية بواسون بمتوسط معدل لـ ν بوحدة الزمن ، وان $\{Y_n\}$ متغيرات عشوائية متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي

اثبت ان

$$E[X(t)] = \mu_1\int_0^t w(s)\,ds, \qquad \mathrm{Var}[X(t)] = \mu_2\int_0^t w^2(s)\,ds$$

5C- عمليات بواسون المصفاة غير المتجانسة

افرض ان $\{N(t), t\geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون غير المتجانسة او بدالـة قيمة وسطية $m(t)=E[N(t)]$ ذات مشتقة مستمرة

$$\nu(t) = \frac{d}{dt}m(t)$$

لاحظ ان $\nu(t)\,dt$ عبارة عن احتمال حصول قفزة واحدة للعملية $N(t)$ في الفاصلـة الزمنية $[t, t+dt]$ تقريباً . افرض ان $\{X(t), t\geq 0\}$ كما معرفة في المعادلة .
اثبت ان

$$\log \varphi_{X(t)}(u) = \int_0^t \nu(\tau)\ E[e^{iuw(t,\tau,Y)} - 1]\ d\tau,$$
$$E[X(t)] = \int_0^t \nu(\tau)\ E[w(t,\tau,Y)]\ d\tau,$$
$$\mathrm{Var}[X(t)] = \int_0^t \nu(\tau)\ E[w^2(t,\tau,Y)]\ d\tau,$$
$$\mathrm{Cov}[X(t_1), X(t_2)] = \int_0^{min\ (t_1,t_2)} \nu(\tau)\ E[w(t_1,\tau,Y)w(t_2,\tau,Y)]\ d\tau$$

ملاحظة :

ان هذه النتائج عبارة عن نموذج للضوضاء الطلقية غير الثابتة . تأمل الضوضاء الطلقية الناتجة من صمام ثنائي ذي درجة حرارة محدودة يشتغل بتيار متناوب من مصدر كاثودي مسخن مباشرة . ان احتمال انبعاث الالكترونات من الكاثود يختلف اختلافاً دورياً — . ان عدد الالكترونات $N(t)$ المنبعثة في الفاصلة الزمنية $(0,t]$ عبارة عن عملية بواسون غير المتجانسة بدوال دورية تساوي $\nu(t)$.

ل $X(t)$ قانوناً يعطى بالصيغة الاتية :

$$\frac{1}{i^k}\frac{d^k}{du^k}\log \varphi_{X(t)}(0) = \nu\, \mathrm{E}[Y^k] \int_{-\infty}^{\infty} w^k(s)\ ds$$

بافتراض وجود توقع وتكامل مطلق .

5B – عمليات بواسون المركبة او المصفاة التعميمية .

تأمل حوادث تقع على شكل مجموعات بدلاً من شكلها الانفرادي (مثلاً . الحصول على الجزيئات باستخدام الاشعة الكونية) . عندما $k = 1, 2, \cdots$ افترض ان الحادثة عبارة عن وصول k جزيئة في نفس الوقت وحسب عملية بواسون $N_k(t)$ بمعدل متوسط λ_k بوحدة الزمن . افترض استقلالية العمليات $\{N_k(t), k = 1, 2, \cdots,$ افرض ان $N(t)$ عبارة عن العدد الكلي للجزيئات الواصلة في الفاصلة $(0,t]$ اذن

$$N(t) = N_1(t) + 2N_2(t) + \cdots + kN_k(t)$$

(i) اثبت ان $E[N(t)] = \mu_1 t$, $\mathrm{Var}[N(t)] = \mu_2 t$ حيث

$$\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k, \qquad \mu_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\lambda_k$$

(ii) اثبت ان $N(t)$ تمثل على شكل عملية بواسون المركبة .

(iii) افرض ان الجزيئات المتكونة باستخدام الاشعة الكونية تتكون من جزيئات تتبادل شحنات متساوية الى الكترومتري ذي انحراف في الزمن t يكون بالشكل الاتي

$$X(t) = \sum_{0<\tau_n\leq t} w(t-\tau_n),$$

حيث $\{\tau_n\}$ عبارة عن ازمنة استلام الشحنات ، وان $w(u)$ عبارة عن دالة استجابة النبضات .

5D التقارب الطبيعي لعمليات بواسون المصفاة . افرض ان

$$X(t) = \sum_{-\infty<\tau_n<\infty} w(t,\tau_n,Y_n)$$

عبارة عن عملية بواسون المصفاة . افرض ان

$$m(t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} E[w(t,\tau,Y)]\, d\tau,$$

$$\sigma^2(t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} E[\,|\,w(t,\tau,Y)\,|^2]\, d\tau,$$

$$\rho(s,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E[w(s,\tau,Y)w(t,\tau,Y)]\, d\tau}{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} E[\,|\,w(s,\tau,Y)\,|^2]\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} E[\,|\,w(t,\tau,Y)\,|^2]\, d\tau\right\}^{1/2}},$$

$$K(t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} E[\,|\,w(t,\tau,Y)\,|^3]\, d\tau.$$

افرض ان كل قيمة من قيم $t, m(t), \sigma(t)$ ، $K(t)$ المحدودة ستقترب الى

$$\frac{K(t)}{\sigma^3(t)} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E[\,|\,w(t,\tau,Y)\,|^3]\, d\tau}{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} E[\,|\,w(t,\tau,Y)\,|^2] d\tau\right\}^{3/2}}$$

الى صفر عندما تقترب بعض المعالم (مثلاً ν) الى حدود معينة . عندما تقترب هذه المعالم الى الحدود المعطاة فان $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ ستكون متقاربة طبيعياً بالمعنى الذي تتحقق به صحة المعادلة 5.8 في الفصل الثالث .

تلميح : استخدم الحقائق الاتية

$$\log \varphi_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(u_1,\cdots,u_n) = i\sum_{j=1}^{n} u_j m(t_j) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1} u_j u_k \rho(t_j,t_k)\sigma(t_j)\sigma(t_k) + \theta \sum_{j=1} K(t_j)\,|\,u_j\,|^3,$$

حيث θ ترمز لكمية ذات قيمة مطلقة اقل من 1 اثبت ان العملية القياسية

تحقق . $\{X^*(t), -\infty < t < \infty\}$

$$\log \varphi_{X^*(t_1),\dots,X^*(t_n)}(u_1, \cdots, u_n) = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k \rho(t_j,t_k) + \theta \sum_{j=1}^{n} \frac{K(t_j)}{\sigma^3(t_j)} |u_j|^3.$$

التمارين

لكل من العمليات التصادفية $X(t)$ الموصوفة في التمارين 5.1 الى 5.7

(i) اوجد القيمة الوسطية $m(t) = E[X(t)]$ والغاية $m = \lim_{t\to\infty} m(t)$ ان وجدت عندما $t \geq 0$

(ii) اوجد التباين $\sigma^2(t) = \mathrm{Var}[X(t)]$ والغاية $\sigma^2 = \lim_{t\to\infty} \sigma^2(t)$ ان وجدت عندما $t \geq 0$

iii) اوجد التغاير $K(t_1, t_2) = \mathrm{Cov}[X(t_1), X(t_2)]$ والغاية $R(t) = \lim_{s\to\infty} \mathrm{Cov}[X(s), X(s+t)]$ ان وجدت

(iv) اوجد دالة الخاصية $\varphi_{X(t)}(u)$ ذات البعد الواحد عندما $t \geq 0$

تأمل ربة البيت في التمرين 2.2 (ص . 132) . افرض ان $X(t)$ تمثل العمولة الكلية الناتجة من طلبات الاشتراك خلال مدة سنة واحدة سابقة لـ t مباشرة . افرض تمت ملاحظة ربة البيت بعد سنة من بدء بيعها للاشتراكات .

5.1 تأمل ربة البيت في التمرين 2.2 . افرض ان $X(t)$ عدد الاشتراكات التي بلغتها

5.2 ربة البيت في الزمن t

5.3 العدد الـ paralyzable . افرض ان الاشارات الالكترونية (مثلاً في حالة الجزيئات المشعة الواصلة مثل الاشعة الكونية او اشعة x) تصل حسب عملية بواسون الى نظام عداد . في حالة العداد الـ paralyzable (او نوع II) الجزيئة التي تصل الى العداد ستغلق العداد لمدة عشوائية Y . تعد الجزيئة الواصلة الى العداد (تسجل). اذا انتهى وقت غلق الجزيئات الواصلة الى العداد سابقاً والعكس صحيح .

افرض ان $X(t)$ تمثل عدد الجزيئات التي ستغلق العداد في الزمن t . ان الاحتمال $P[X(t) = 0]$ مهم بصورة خاصة انه يمثل احتمال عدم غلق العداد في الزمن t

5.4 تصل النداءات التلفونية الى مركز للاتصالات اللاسلكية ذي عدد الخطوط التلفونية غير المحدودة بمعدل 30 بالدقيقة . ان زمن كل مكالمة موزع . بصورة آسية وبمتوسط 3 دقيقة . افرض ان $X(t)$ عدد المكالمات المستمرة في الزمن t .

5.5 تصل الطلبات الخاصة بمادة معينة الى المصنع بمعدل 1 بالاسبوع افترض ان وصول الطلبات عبارة عن حوادث من نوع بواسون . يتم انتاج المادة عند الطلب فقط . لاتوجد محددات للانتاج وان المصنع يبدأ بانتاج المادة مباشرة عند استلام الطلبية – الوقت الذي يستغرقه انتاج المادة متغير عشوائي موزع بصورة منتظمة بين 80 .. 90 يوم . افرض ان $X(t)$ تمثل عدد الطلبيات في حالة الانتاج في الزمن t .

5.6 استمرارية للتمرين 5.5 . افرض ان $X(t)$ تمثل عدد الايام المتبقية لاكمال انتاج الوحدات المطلوبة من المادة .

5.7 تأمل العملية التصادفية ذات الشكل الاتي :

$$X(t) = \sum_{m=1}^{N(t)} Y_m e^{-(t-\tau_m)/RC}$$

حيث $\{\tau_n\}$ عبارة عن ازمنة وقوع الحوادث حسب عملية بواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ بكثافة تساوي ν , $\{Y_n\}$ عبارة عن متغيرات . عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي Y الموزع آسياً وان R , C كميتان موجبتان ثابتتان .

5.8 تأمل عملية بواسون $\{X(t), t \geq 0\}$ المعرفة في التمرين 5.7 اثبت ان العملية ستكون تقريباً طبيعية اذا كان RC ذو قيمة كبيرة .

الفصل الخامس

عمليات العد التجديدي :

تعرف عملية القيم العددية الصحيحة ، او عملية العدد التي هي عبارة عن سلسلة من النقاط في الفترة الزمنية من صفر الى ∞ بانها عملية عـد تجديدي اذا كانت ازمنة الوصول T_1, T_2 بين النقاط المتابعة عبارة عن متغيرات عشوائية موجبة موزعة توزيعا مستقلا متماثلا. نناقش في هذا الفصل بعضا من الخصائص الاساسية لعمليات العد التجديدي .

لاتعتبر عبارة العد التجديدي بالمصطلح القياسي . هناك العديد من الكتـاب يستخدمون عبارة عد تجديدي لتعني تتابعا من المتغيرات العشوائية $T_1, T_2,$ الموجبة المستقلة الممثلة لأزمنة الفجوات بين وصولين متعاقبين . نعرف النظرية التجديدية بانها دراسة للعمليات التجديدية . تمثل عملية العد $\{N(t), t \geq 0\}$ عدد التجديدات الحاصلة في فترة زمنية معينة ولذلك سنطلق عليها مصطلح العمليـات العدديـة التجديدية .

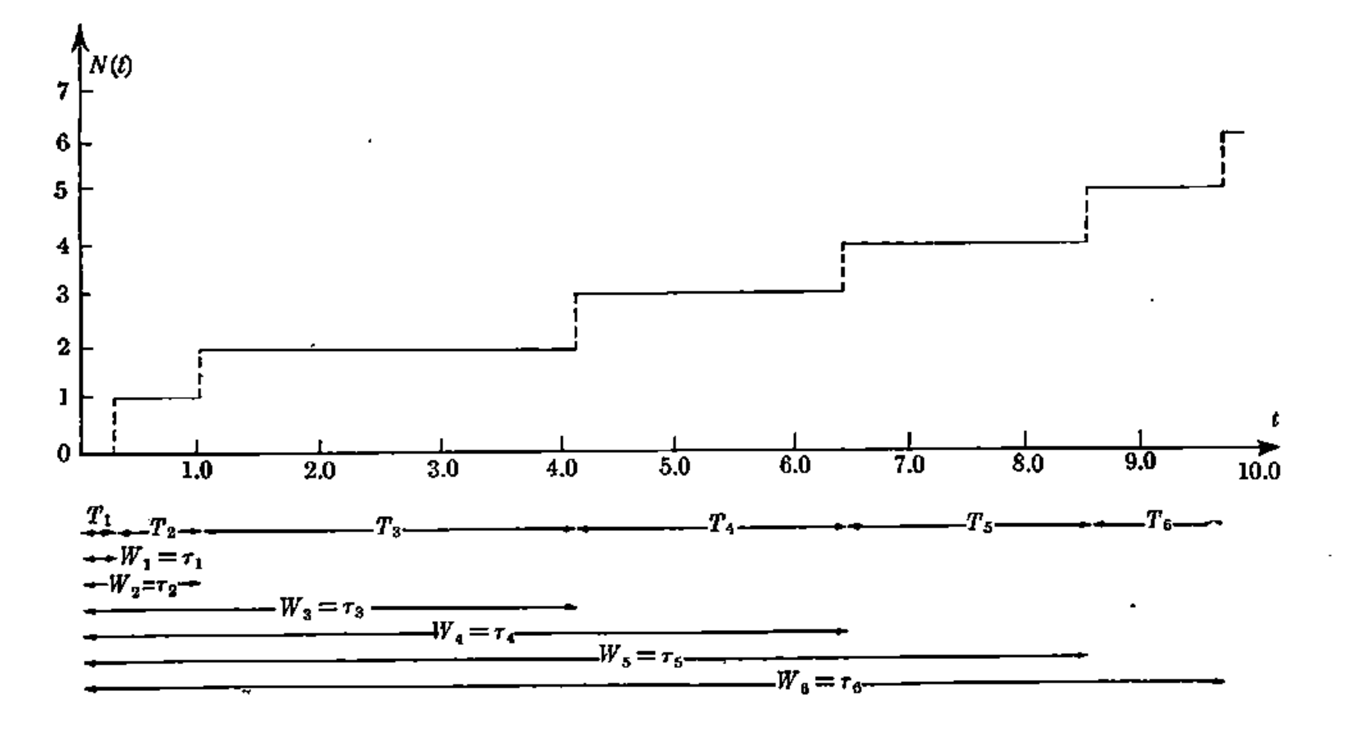
5-1 امثلة عمليات العد التجديدي .

نصف في هذا البند عدداً كبيراً من الظواهر المختلفة الخاضعة لعمليات العـدد التجديدي . الشكل 5.1 يوضح دالة عملية العد التجديدي لعينة ما .

مثال 1A

العطب والاستبدال :

نفترض استخدام معدات بصورة مستمرة الى ان تصاب بالعطب ثم تستبدل بوحدة من نفس النوع (مثال على ذلك ، المصباح الالكتروني ، الوعاء المفرغ من الهواء ، ماكنة معينة وما شابه ذلك) . طول المدة الزمنية التي تبقى فيها المعدة صالحة للاستعمال عبارة عن متغير عشوائي T يخضع لقانون احتمال محدد ومعروف . نفترض ان ازمنة بقاء المعدات المتابعة بصورة صالحة للعمل هي $T_1, T_2, \ldots$ عبارة عن متغيـرات



الشكل 5.1 يمثل دالة عملية العدد التجديدي $\{N(t), t \geq 0\}$ المناظرة لزمن الوصول المتعاقب حيث ان دالة كثافة احتمال تلك العمليه هي $f(x) = xe^{-x}$, for $x \geq 0$.

عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي T . اذا كانت $N(t)$ تمثل عـــدد المعدات التي استبدلت في الفترة الزمنية من صفر الى t فان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية عد تجديدي .

مثال 1B

الحركة المرورية :

مركز بريدي للطلبات المنزلية يستلم طلبات عدد من الاماكن او استلام النداءات في مركز الاتصالات التلفونية – تصل الطلبات المنزلية او النداءات التلفونية في الأزمنـــة $\tau_1, \tau_2, \cdots$ حيث $0 < \tau_1 < \tau_2 \cdots$ نفترض ان ازمنة الوصول المتتابعـــة $T_1 = \tau_1,\ T_2 = \tau_2 - \tau_1, \cdots, T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, \cdots$ عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع . نفترض ان $N(t)$ تمثل عدد الطلبات (النداءات) الواصلة في الفترة الزمنية $(0,t]$ $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية عد تجديدي .

مثال

عداد الجزيئات النووية – الدائرة العادة :

ان عمليات العد التجديدي تؤدي دورا مهما في نظرية العدادات الجزئية النووية انالنموذج الحاصل من دائرات العد عبارة عن عمليات عد تجديدي .

تكون سعة عدادات الاشعاعات من المصادر المشعة محدود حيث في معظـــم العدادات لايسجل الاشعاع الواصل مباشرة بعد تسجيل اشعاع سابق . يوجد في معظم عدادات الاكتشاف ثابت معين يطلق عليه زمن التحليل . اي انه بعد تسجيل شعـــاع معين فان العداد لايمكنه تسجيل الاشعاعات المتتابعة حتى يمضي وقت يساوي زمـــن تحليل ذلك العداد . نستطيع تقليل الخسارة الناجمة عن زمن التحليل الموجب بعرض مفهوم الدائرة الكهربائية التي بدورها تسجل عدة واحد لكل عدد معلوم (مثلا s) من الحوادث الداخلة . الجهاز الذي يقوم بهذه العملية يسمى بالمقياس s للدوائـــر العادة . نفرض ان $T_1, T_2, \cdots$ تمثل الفترات الزمنية بين العدات المسجلة المتتابعـــة للمقياس s للدائرة العادة .

بامكاننا اثبات ان $T_1, T_2, \cdots$ عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة كل منها يخضع .

لقانون احتمال كاما ذي المعلمين ν , s اذا كان وصول الاشعة عبارة عن حـــوادث من نوع بواسون بكثافة تساوي ν (راجع النظرية 3A في الفصل الرابع) .

عمليات العد التحديدي المتأخر :

يحدث ان يكون توزيع زمن الوصول الاول T_1 يختلف عن توزيع ازمنة الوصول الباقية $T_2, T_3, \cdots$ والتي تكون متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي T

تعرف عملية العد $N(t)$ المقابلة لمتوالية من النقاط الموزعة في الفاصلة صفر الى ∞ بعملية العد التجديدي المتأخر اذا كانت ازمنة الوصول $T_2, T_3, \cdots$ عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة بحيث تكون متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي الموجب T

مثال 1D

عدادات الجزيئات النووية ذات الزمن الخامد :

نفرض ان نبضات كهربائية متقطعة (ناتجة عن وصول الجزيئات الاشعاعية مثـل الاشعة الكونية اواشعة x في حالة مثالية) تصل الى العداد في الأزمنة $\tau_1, \tau_2, \cdots$ حيث $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ لمعظم العدادات زمن تحليل موجب ولذلك لايمكن تسـجيل جميع الجزيئات الواصلة اليها . يكون العداد في أي لحظة زمنية اما في وضع يسمـــح بتسجيل الجزيئة او لا يسمح بتسجيلها في تلك اللحظة .

يقال ان العداد مقفل لمدة زمنية معينة اذا كان الوضع لايسمح بتسجيل الجزيئات الواصلة اليه .

يجب ان نميز بين عملية العد التي يرمز لها بالرمز $\{N(t), t \geq 0\}$ مثلاً لوصول الجزيئات وعملية العد التي يرمز لها بالرمز $\{M(t), t \geq 0\}$ مثلاً الجزيئات المسجلة .

نستطيع مشاهدة العملية $\{M(t), t \geq 0\}$ فقط ومنها نحصل على خصائص العملية $\{N(t), t \geq 0\}$. يفترض غالباً في $\{N(t), t \geq 0\}$ ان تكون عملية بواسون بكثافة λ . ثم بعد ذلك تستخدم العملية المشاهدة $\{M(t), t \geq 0\}$ لتقدير قيمة λ .

تعامل العملية $\{M(t), t \geq 0\}$ غالباً على اساس انها عملية للعد التجديدي . اذا كان زمن وصول الجزيئات الى العدد هو $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ فان الأزمنة $0 < \tau_1' < \tau_2' < \cdots$

هي عبارة عن ازمنة تسجيل الجزيئات وتكون هذه الازمنة عبارة عن تتابع جزئي لازمنة وصول الجزيئات .

نفرض ان

$$T_1 = \tau_1,\ T_2 = \tau_2 - \tau_1, \cdots, T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, \cdots$$

عبارة عن الفجوة الزمنية بين الوصول المتتابع للجزيئات . نفرض ان

$$T_1' = \tau_1',\ T_2' = \tau_2' - \tau_1', \cdots, T_n' = \tau_n' - \tau_{n-1}', \cdots$$

عبارة عن الفجوة الزمنية بين تسجيل الجزيئات المتتابعة .

نفرض ان $M(t)$ عبارة عن عدد الجزيئات المسجلة في الفترة $[0,t]$ لكي نثبت ان $\{M(t),\ t \geq 0\}$ عبارة عن عملية عد تجديدي متكونه نتيجة ازمنة الوصول $T_1', T_2', \cdots$ نحتاج ان نثبت ان (i) المتغيرات العشوائية $\{T_n'\}$ مستقلة T_1' (ii) موزع اسيا بمتوسط $1/\lambda$. بينما $T_2', T_3', \cdots$ متماثلة التوزيع . حيث من المحتمل ان تكون $\{M(t),\ t \geq 0\}$ عبارة عن عملية عد تجديدي متأخر . لكي نثبت ان هذه هي الحالة علينا ان نضع افتراضات معينة حول نظام العد .

تقسم العدادات المستخدمة بصورة رئيسية الى نوعين هما عداد (النوع I) non-paralyzable او (عدادالنوع II) *paralyzable*

في حالة عداد النوع I يبقى العداد مغلقاً بعد تسجيل الجزيئة لمدة زمنية عشوائية Y تسمى بزمن الخمود deadtime اوزمن الغلق . اوزمن اشغال الجزيئة للعداد الجزيئات الواصلة الى العداد خلال الزمن Y لايتم تسجيلها ولاتؤثر على عمل العداد باية حالة من الاحوال عدادات النوع II عبارة عن عدادات الومضاء وعدادات كيجر – ملر ذاتية التبريد المتصلة بمكبر متقدم حساس . راجع Evans، سنة (1955)، ص 785.

اما في حالة العداد نوع I *paralyzable* فان وصول الجزيئة الى العداد يسبب غلق العداد لمدة زمنية عشوائيةتسمى بزمن الغلق . بغض النظرعن تسجيل الجزئية اوعدم تسجيلها . وهكذا فان الجزيئة الواصلة الى العداد ستسجل اذا انقضى وقت الغلق لجميع الجزيئات السابقة التي وصلت الى العداد والعكس صحيح . عدادات النوع II عبارة عن عدادات الكتروميكانيكية التسجيل وعدادات كيجرملر ذات البنزاللاذاتي المتصلة بمقاومة عالية لمكبرات متقدمة .

نوضح تأثيرعدادات النوع I وعدادات النوع II على سلسلة من الجزيئات في الشكل 5.2 .

بامكاننا ان نتصور (على الاقل من الناحية الرياضية) وجود عداد يحتوي على النوعين السابقين كحالات خاصة .يتم تسجيل الجزيئة الواصلة الى العداد اذا كان غير مغلـــق بالاضافة الى غلقه مدة عشوائية Y لاتسجل الجزيئة عندما يكون العداد مغلقاً ولـكنها باحتمال p (حيث $0 \leq p \leq 1$)ستغلق العداد مدة عشوائية Y نطلق على هذا النوع من العدادات بالعداد نوع p .من الواضح ان العداد نوع I عبارة عن عداد نوع صفر وان العداد نوع II عبارة عن عداد نوع واحد .

نفترض ان ازمنة الغلق العشوائية بغض النظر عن نوعية العداد المستخدم عبارة عـــن متغيرات عشوائية مستقلة $Y_1, Y_2, \cdots$ متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي Y ذي العزم الثاني المحدود . ان عملية العد $\{M(t), t \geq 0\}$ للجزيئات المسجلة عبارة عن عملية عد تجديدي .

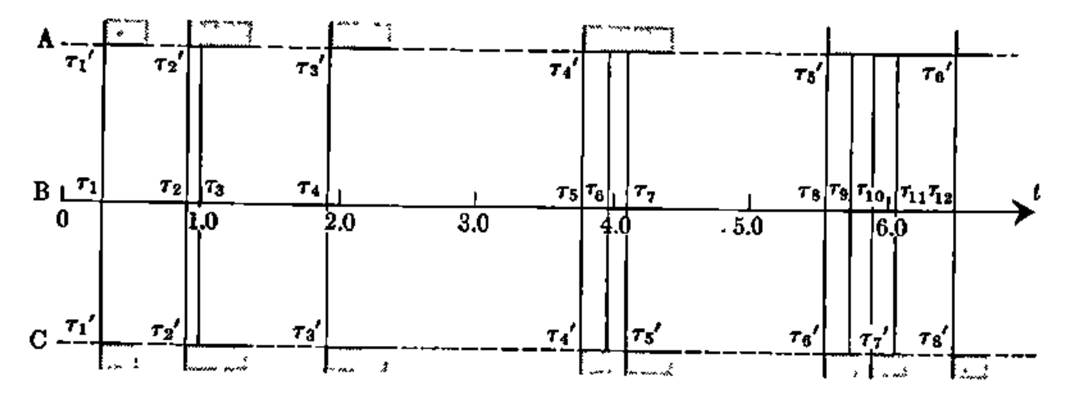
من الجدير بالاشارة ان الابحاث الرياضية والفيزيائية تقسم عدادات الجزيئات النووية الى قسمين هما عداد نوع I وعداد نوع II وعلى كل حال فان تسمية نوع العداد بالنوع I او النوع II قد يختلف من كاتب الى اخر (راجع Feller سنة 1948 Evans سنة [1955] Korff سنة 1955) ان المصطلحات الفيزيائية للعدادات نوع I ونوع II جديرة بالاهتمام والبحث . لكي نسهل دراسة تلك البحوث سنطلق المصطلحات نوع I . نوع II كما مستخدمة من قبل الاحتماليين الذين كتبوا حول العدادات (راجع Pyke سنة [1958] . Smith سنة [1958] . Takács [1958, 1960]

مثال 1E

عداد النوع II (او paralyzable) ذوزمن الخمود الثابت L .

تأمل عداد جزيئات نووية بزمن خمود (قفل) ثابت يساوي L . نفرض ان $N(t)$ تمثل عدد الجزيئات الواصلة الى العداد خلال الفترة الزمنية $(0,t]$ ثم افرض ان

$M(t)$ تمثل عدد الجزيئات المسجلة باستخدام العداد خلال الفترة الزمنية $(0,t]$. يتم تسجيل الجزيئة عندما لاتصل جزيئات خلال المدة الزمنية السابقة ذات الطول L . وهكذا فان احتمال تسجيل الجزيئة سيكون $p = e^{-\nu L}$. ان الفترات الزمنية بيـــن الوصول المتعاقب للجزيئات ستكون مستقلة حسب النظرية 3A في الفصل الرابع . لذلك فان تسجيل جزيئة لايعتمد على تسجيل الجزيئات الاخرى . يمكن القول بان . العملية $\{M(t), t \geq 0\}$ مستخرجة من عملية بواسون $\{N(t), t \geq 0\}$



A ازمنة تسجيل الحريئات باستخدام العداد II
B ازمنة الوصول الحقيقي للحريئات
C ازمنة تسجيل الحريئات باستخدام العداد نوع I

الشكل 5.2. عبارة عن مخطط توضيحي لطبيعة عدادات الحريئات النووية ذات زمن الخمود الثابت L تمثل المحور الزمني من اليسار الى اليمين توضح ازمنة وصول الحريئات بالخطوط العمودية تكون استجابة عداد النوع II ذي زمن الخمود الثابت L للحريئات التي تكون الفجوة الزمنية بين وصول حريئتين متتاليتين أطول من L فقط المخططات المظللة العليا تمثل عدد الحريئات المسجلة باستخدام العداد نوع II بالاضافة الى توضيح المدة الزمنية لغلق العداد العدادات نوع I (ذات زمن الخمود الثابت L) تكون غير حساسة (معلقة) لمدة زمنية تساوي L بعد تسجيل شعاع ما . ثم يستجيب لتسجيل اية حريئة واصلة بعد زمن الخمود المخططات المظللة السفلى تمثل عدد الحريئات المسجلة باستخدام العداد I بالاضافة الى توضيح المدة الزمنية التي يكون فيها العداد معلقا كان عدد الحريئات الواصلة في المثال الافتراضي اعلاه 12 حريئة تم تسجيل 6 حريئات منها باستخدام العداد نوع II و 8 حريئات باستخدام العداد نوع I

بالاختبار العشوائي (كما معرفة في البند 1-2) ونتيجة لذلك ستكون عملية بواسون لكن على كل حال فان العملية $\{M(t), t \geq 0\}$ بعملية بواسون لان تسجيل الجزيئة غير مستقل عن العملية $\{N(t), t \geq 0\}$

ان الازمنة المتعاقبة بين تسجيل الجزيئات مع ذلك ستكون عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع وهكذا فان $\{M(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية عد تجديدي

نحتاج ان نجد قانون احتمال الزمن T بين تسجيل الجزيئات لكي نحدد خصائص تلك العملية .

تثبت الان ان دالة خاصية T ، متوسطة ، تباين يكون كما يلي

$$\varphi_T(u) = \left\{1 - \frac{iu}{\nu} e^{(\nu - iu)L}\right\}^{-1} \tag{1.1}$$

$$E[T] = \frac{1}{\nu} e^{\nu L}, \tag{1.2}$$

$$\text{Var}[T] = \frac{e^{2\nu L}}{\nu^2} - \frac{2Le^{\nu L}}{\nu}. \tag{1.3}$$

تصل الى العداد خلال الزمن T بين تسجيل جزيئتين عدد معين من الجزيئات التي لايتم تسجيلها ولنرمز لذلك العدد بالرمز M . نلاحظ اولا عندما $m = 0, 1, \cdots$ فان

$$P[M = m] = pq^m, \tag{1.4}$$

حيث $p = e^{-\nu L}$, $q = 1 - p$, p عبارة عن احتمال الفجوة الزمنية بين وصـــول الجزيئات اطول من L . نعتبرزمن الانتظار T بين تسجيل الجزيئات عبارة عن حاصــل جمع عدد عشوائي من المتغيرات العشوائية المستقلة :

$$\begin{aligned} T &= U_1 + \cdots + U_M + V & M \geq 1 \\ &= V & M = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

حيث U_1 عبارة عن المدة الزمنية حتى وصول الجزيئة الاولى التي لايتم تسجيلها . U_2 الفترة الزمنية بين وصول الجزيئة الاولى والثانية اللتين لم يتم تسجيلهما وهلم جرى . اما V فتعرف كما يلي : عندما تكون $M \geq 1$ فان V عبارة عن الفترة الزمنية بين الجزيئة الاخيرة التي لم يتم تسجيلها والجزيئة التي يتم تسجيلها . عندما $M = 0$ فان V عبارة عن الفترة الزمنية حتى وصول الجزيئة التي يتم تسجيلها . يكون توزيع $U_1, \cdots, U_M$ بصورة متماثلة كالمتغير العشوائي U ذي دالة التوزيع .

$$F_U(u) = \frac{1 - e^{-\nu u}}{1 - e^{-\nu L}}, \quad 0 \leq u \leq L, \tag{1.6}$$

ودالة كثافة احتمال

$$f_U(u) = \frac{\nu e^{-\nu u}}{1 - e^{-\nu L}}, \quad 0 < u < L \tag{1.7}$$

ودالة خاصة

$$\varphi_U(u) = \int_0^L e^{iux} f_U(x)\, dx = \frac{\nu}{\nu - iu} \frac{1 - e^{-\nu L} e^{iuL}}{1 - e^{-\nu L}}. \tag{1.8}$$

من جانب اخر تكون دالة توزيع V كما يلي

$$1 - F_V(v) = e^{-\nu(v - L)}, \quad v \geq L, \tag{1.9}$$

دالة كثافة الاحتمال

$$f_V(v) = \nu e^{-\nu(v-L)}, \quad v \geq L \tag{1.10}$$

ودالة خاصية

$$\varphi_V(u) = \int_L^\infty e^{ixu} f_V(x)\, dx = \frac{\nu}{\nu - iu} e^{iuL}. \tag{1.11}$$

تعطي دالة خاصية كما يلي

$$\begin{aligned} \varphi_T(u) &= \sum_{m=0}^{\infty} E[e^{iuT} \mid M = m] P[M = m] \\ &= \frac{p\varphi_V(u)}{1 - q\varphi_U(u)}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

نحصل من المعادلات الثلاث 1.12 ، 1.11 ، 1.8 على المعادلة 1.1 . لكي نبرهن المعادلتين 1.3 ، 1.2 نستخرج قيمه مشتقة لوغارتم دالة الخاصية عند النقطة $u = 0$

$$\frac{d}{du} \log \varphi_T(u) = \frac{\{i - uL\}}{\{\nu e^{-(\nu - iu)L} - iu\}},$$

$$\frac{d^2}{du^2} \log \varphi_T(u) = \frac{\{1 + 2iuL - (2L + iuL^2)\nu e^{-(\nu - iu)L}\}}{\{\nu e^{-(\nu - iu)L} - iu\}^2}.$$

للحصول على امثلة تطبيقية لعمليات العد التجديدي لعمليات التطور الرياضية الجنينية راجع كتاب Owen (1949) .

المكملات :

دالة المجازفة *hazard function* او (المخاطرة) وتوزيعات عمر الانظمة الميكانيكية ، مشاريع الاعمال وهلم جرى . سنعتبر دالة المخاطرة عندما نحتاج معرفة شكل توزيع الحوادث مثل توقف الانظمة عن العمل .

نفرض ان T عبارة عن متغير عشوائي يمثل على نظام معين .

نفرض ان $F(x)$ عبارة عن دالة توزيع T ، $f(x)$ دالة كثافة احتمال T نعرف دالة اخرى $\mu(x)$ ونطلق عليها اسم دالة الكثافة او دالة المخاطرة او المعدل الشرطي لدالة العطب T وكما يلي :

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad \text{(i)}$$

بعبارة اخرى $\mu(x)$ عبارة عن الاحتمال الشرطي لعطب النظام في الفترة الزمنية المحصورة بين x ، $x + dx$ اذا علمت بصلاحية ذلك النظام في الزمن T الذي هو اكبر من x .

اذا علمت دالة المخاطرة $\mu(x)$ فان دالة التوزيع المقابلة لها تكون

$$1 - F(x) = \{1 - F(x_0)\} \exp\left[- \int_{x_0}^{x} \mu(z)\, dz\right]$$

حيث x_0 أية قيمة من قيم x لانه يمكن كتابة (i) كما يلي :

$$\frac{d}{dx} \log[1 - F(x)] = - \mu(x)$$

1A – اثبت ان وجد حد ادنى ϵ لقيمة T (بصورة ادق اذا كانت $F(\epsilon) = 0$)

فان $\qquad 1 - F(x) = \exp\left[- \int_{\epsilon}^{x} \mu(z)\, dz\right], \qquad x > \epsilon$

1B – اثبت ان دالة المخاطرة الثابتة

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

والحد الادنى $\epsilon = 0$ يؤديان للحصول على التوزيع الاسي .

$$\mu(x) = \lambda, \qquad x > 0$$

1C يعرف المتغير العشوائي T الذي يأخذ قيماً اكبر من عدد ما ϵ فقط بانه له توزيع ويبل Weibull ذي المعلمين v و k (حيث $v \geq \epsilon$ ، $k > 1$) اذا كانت دالة توزيعه كما يلي :

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-\epsilon}{v-\epsilon}\right)^k\right\}, \qquad x \geq \epsilon$$
$$= 0, \qquad x < \epsilon,$$

او اذا كانت دالة كثافة احتماله كما يلي

$$f(x) = \frac{k}{v-\epsilon}\left(\frac{x-\epsilon}{v-\epsilon}\right)^{k-1} \exp - \left\{\left(\frac{x-\epsilon}{v-\epsilon}\right)^k\right\}, \qquad x > \epsilon$$
$$= 0, \qquad x < \epsilon.$$

اثبت ان توزيع ويبل يقابل دالة المخاطرة

$$\mu(t) = k\left(\frac{t-\epsilon}{v-\epsilon}\right)^{k-1}, \qquad t > \epsilon.$$

1D يعرف المتغير العشوائي T بان له توزيع القيمة العظمى « من النوع الاسي » ذي المعلمين u ، β (حيث u ، β كميتان ثابتتان بحيث $-\infty < u < \infty$ ، $\beta > 0$) . اذا كانت دالة توزيعه كما يلي :

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-e^{-\left(\frac{x-u}{\beta}\right)}\right\}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

او اذا كانت دالة كثافة احتماله كما يلي :

$$f(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x-u}{\beta}\right) - e^{-\left(\frac{x-u}{\beta}\right)}\right\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

اثبت ان توزيع القيمة العظمى (من النوع الاسي) تقابل دالة المخاطرة

$$\mu(t) = \frac{1}{\beta}\exp\left[-\left(\frac{t-u}{\beta}\right)\right], \qquad -\infty < t < \infty,$$

والحد الادنى $\epsilon = -\infty$. ان المعلمين u ، β لتوزيع القيمة العظمى هما بمثابة معلمين للموقع وللقياس بنفس طريقة استخدام المتوسط m والتباين σ^2 في حالة التوزيع الطبيعي . للحصول على مناقشة كاملة لتوزيعات القيمة العظمى راجع Gumbel سنة 1958 .

1E – اوجد توزيع الدالتين المقابلتين لدالتي المخاطرة a ، b كميتان ثابتتان موجبتان)

(i) $\mu(t) = ae^{-bt}$ $\qquad$ (ii) $\mu(t) = \dfrac{b}{t+a}$

والحد الادنى $\epsilon = 0$. راجع Lomax سنة 1954 للتعرف على كيفية ظهور دوال المخاطرة بالصورة الاعتبارية

التمارين :

1.1 يسمع قائدالفرقة الموسيقية في احدى الحفلات ضوضاء تاتي من المشاهدين (مثل هذه الضوضاء قد يكون السعال) تكون هذه الضوضاء من نوع بواسونيًا وتسمح بمعدل مرة واحدة كل عشر ثوان .
اوجد الخاصية المتوسط والتباين لزمن انتظار قائد الفرقة الموسيقية الى ان يبدأ برنامجه اذا علمت ما يلي :

(i) يبدأ برنامجه حال سماعه الضوضاء المسبوقة بهدؤ على الاقل مدة 20 ثانية.

(ii) الى ان يكون الهدؤ مستمرا لمدة 20 ثانية .

(iii) حتى تنقضي مدة 20 ثانية من وقت سماعه للضوضاء الاولى (بافتراض عدم ابتداء برنامجه حتى يسمع على الاقل لضوضاء واحدة .

1.2 تأمل عدادا من النوع I حيث تكون ازمنة الغلق المتتابعة $Y_1, Y_2, \cdots$ متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي Y بعزم ثانٍ محدود . نفترض ان وصول الجزيئات عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة تساوي λ .
عبر عن دالة الخاصية ، المتوسط ، والتباين للمتغيرات العشوائية $\{T_n', n \geq 2\}$ حيث

$$T_n' = \tau_n' - \tau_{n-1}'$$

عبارة عن زمن بين تسجيل جزيئتين متتاليتين ، بدلالة دالة خاصية متوسط وتباين Y .

تلميح : يمكن كتابة الفجوة الزمنية للوصول T_n' على شكل مجموع

$$T_n' = Y_n + V_n$$

حيث Y_n عبارة عن زمن الخمود الناجمة عن تسجيل جزيئة في الزمن τ_{n-1}' وان V_n عبارة عن الوقت المنقضي بين $\tau_{n-1}' + Y_n$ عندما يصبح العداد غير مغلق ، والزمن τ_n' الذي يحدث فيه تسجيل جزيئة

قادمة. بما ان وصول الجزيئات هو من نوع بواسون فان Y_n ، V_n مستقلان وان V_n موزعة حسب التوزيع الاسي بمتوسط $1/\lambda$

5-2 : معادلة التجديد :

نفرض ان $f(t), g(t)$, $h(t)$ عبارة عن دوال – معرفة عندما تكون $t \geq 0$ وتحقق العلاقة

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-s)f(s)\,ds, \quad t \geq 0. \qquad (2.1)$$

اذا كانت $f(t)$ ، $h(t)$ دالتان معروفتان و $g(t)$ دالة غير معروفة ويجب تحديدها كحل لمعادلة التكامل 2.1 . في هذه الحالة سنقول ان $g(t)$ تحقق معادلة التجديد . يطلق على معادلة التكامل 2.1 بمعادلة التجديد لان العديد من الكميات . المهمة في نظرية عمليات العد التجديدي تحقق معادلة التكامل ذات الشكل الذي يشبه شكل المعادلة 2.1 .

معادلة التجديد لدالة القيمة الوسطية لعمليات العد التجديدي :

ان داله القيمة الوسطية .

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_{N(t)}(n) \qquad (2.2)$$

لعملية العد التجديدي $\{N(t), t \geq 0\}$ تكون مقابلة للفجوات الزمنية للوصول $T_1, T_2, \cdots$ المستقلة المتماثلة التوزيع حيث لكل من هذه الفجوات الزمنية دالة كثافة احتمال $f(\cdot)$ ودالة توزيع $F(\cdot)$ تحققان معادلة التجديد .

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-s)f(s)\,ds, \ t \geq 0. \qquad (2.3)$$

لكي نبرهن المعادلة 2.3 نكتب مايلي .

$$m(t) = \int_0^{\infty} E[N(t) \mid T_1 = s] f_{T_1}(s)\,ds. \qquad (2.4)$$

الان :

$$E[N(t) \mid T_1 = s] = 0 \quad \text{for} \quad s > t, \tag{2.5}$$

لان $N(t) = 0$ اذا وقعت الحادثة الاولى في الزمن s اللاحق للزمن t, بينما

$$E[N(t) \mid T_1 = s] = 1 + m(t - s) \quad \text{if} \quad s \leq t, \tag{2.6}$$

لانه اذا اعطي وقوع الحادثة الاولى في الزمن $s \leq t$ فان التوزيع الشرطي لـ $N(t)$ هـــو نفس التوزيع لـ $1 + N(t - s)$ استخدمنا في كتابتنا للمعادلة 2.6 الاشياء البديهية اكثر من استخدامنا للاساليب الرياضية الدقيقة . ان الاشتقاق الدقيق للمعادلة 2.6 يتطلب ، تطوير مبادىء نظرية العمليات التصادفية وهذا يقع خارج نطاق الكتاب يكون البرهان المبين في هذا الكتاب مناسباً في حالة نظرية الاحتمال التطبيقي .

باستخدام المعادلات 2.4 ، 2.5 ، نحصل على المعادلة 2.3 .

توزيع العمر الزائد :

في دراستنا للانظمة المستبدلة يهمنا دراسة كمية اخرى في الزمن المعلوم وهي عبارة عن المدة الزمنية التي يمكن استخدام النظام فيها لو لم يتم تجديده نرمز لهذه الكميـــة بالرمز $\gamma(t)$ ونطلق عليه اصطلاح العمر عند الزمن t نعبر عن ذلك بالرموز كما يلي

$$\gamma(t) = W_{N(t)+1} - t. \tag{2.7}$$

تكون $\gamma(t)$ عبارة عن الفترة الزمنية بين t ووقوع الحادثـــة القادمـــة تتمثل اهمية دراسة العمر الزائد ليس فقط في كونه وقتاً زائداً وانما لاهميته في دراسة توزيع الزيادة $N(t + v) - N(t)$ لعملية العد التجديدي (حيث v كمية موجبـــة ثابتة) . نستطيع التعبير عن التوزيع الاحتمالي لـ $N(t + v) - N(t)$ بدلالة توزيع $N(t)$ $\gamma(t)$ وكما يلي :

لاي عددين موجبين v, t

$$P[N(t + v) - N(t) = 0] = P[\gamma(t) > v], \tag{2.8}$$

بينما لاي عدد صحيح $n \geq 1$ فان

$$P[N(t+v) - N(t) = n] = \int_0^v P[N(v-s) = n-1]\, dF_{\gamma(t)}(s). \quad (2.9)$$

لـكي تبرهن المعادلة 2.9 نفرض ان A عبارة عن حادثة لـكون $N(t+v) - N(t) = n$ في ضوء ذلك نكتب ما يلي

$$P[A] = \int_0^\infty P[A \mid \gamma(t) = s]\, dF_{\gamma(t)}(s).$$

الان ، $P[A \mid \gamma(t) = s]$ تساوي $P[N(v-s) = n-1]$ أو صفراً حسب لـكون $s \leq v$ او $s > v$

من اجل تحديد التوزيع الاحتمالي للعمر الزائد نستخدم الحقيقة الاتية

$$g(t,x) = P[\gamma(t) > x] \quad (2.10)$$

التي تحقق معادلة التجديد

$$g(t,x) = 1 - F(t+x) + \int_0^t g(t-s,x) f(s)\, ds, \quad (2.11)$$

نفترض ان لفجوات الوصول الزمنية المتعاقبة دالة كثافة احتمال $f(\cdot)$ ودالة توزيـع $F(\cdot)$

لـكي نبرهن المعادلة 2.11 تكتب ما يلي

$$P[\gamma(t) > x] = \int_0^\infty P[\gamma(t) > x \mid T_1 = s] f_{T_1}(s)\, ds.$$

ان

$$\begin{aligned} P[\gamma(t) > x \mid T_1 = s] &= 1 && \text{if} \quad s > t+x, \\ &= 0 && \text{if} \quad t < s < t+x, \\ &= P[\gamma(t-s) > x] = g(t-s, x) && \text{if} \quad s < t. \end{aligned}$$

ناقش المعادلة الاخيرة فقط اذا علمنا ان وقوع الحادثة الاولى يكون عندما $t > s$ فان التوزيع الشرطي لعمر النظام الزائد عند الزمن t سيكون عبارة عن توزيع عمر الجهاز الزائد عن الزمن $t - s$ نحصل من هذه المعادلات على :

$$g(t,x) = \int_0^t g(t-s,x)f(s)\, ds + \int_{t+x}^{\infty} f(s)\, ds$$

ومن المعادلة اعلاه نحصل على المعادلة 2.11

سوف لاتناقش في هذا الكتاب الطرق العامة لحل معادلة التجديد (راجع Feller [1941]) اوخواص معادلة التجديد (راجع Karlin [1955]) لكننا سنوضح في هذا الكتاب كيفية حل معادلة التجديد لبعض الحالات المهمة .

نظرية : 2A

$g(t)$ حل معادلة التجديد في حالة التوزيع الاسي لازمنة الوصول عبارة عن حل لمعادلة التجديد الآتية :

$$g(t) = h(t) + \nu \int_0^t g(t-s)e^{-\nu s}\, ds$$

وسيكون الحل كما يلي :

$$g(t) = g(0) + \int_0^t e^{-\nu s} \frac{d}{ds}\{e^{\nu s}h(s)\}\, ds. \qquad (2.13)$$

البرهان :

نفرض ان $G(t) = e^{\nu t}g(t), H(t) = e^{\nu t}h(t)$ يتضح لنا من المعادلة 2.12 ان $G(t)$ تحقق معادلة التكامل الاتية :

$$G(t) = H(t) + \nu \int_0^t G(s)\, ds,$$

اذن $G(t)$ تحقق معادلة التفاضل الاتية :

$$G'(t) - \nu G(t) = H'(t)$$

والتي سيكون حلها كما يأتي (راجع النظرية 4A في الفصل السابع)

$$G(t) = G(0)e^{\nu t} - \int_0^t e^{\nu(t-s)}H'(s)\, ds$$

ومنها نحصل على المعادلة 2.13.

من النظرية 2A نحصل على حقيقة مهمة جدا . في حالة التوزيع الاسي للوصول يكون توزيع العمر الزائد $\gamma(t)$ حسب التوزيع الاسي وبنفس متوسط زمن الوصول .
نوضح ذلك بالرموز كما يلي
اذا كانت

$$F_T(u) = 1 - e^{-\nu u},$$

فان $\qquad P[\gamma(t) \le x] = 1 - e^{-\nu x}. \qquad (2.14)$

البرهان :

من المعادلة 2.11 نحصل على

$$P[\gamma(t) > x] = e^{-\nu(t+x)} + \nu \int_0^t P[\gamma(t-s) > x]e^{-\nu s}\, ds. \qquad (2.15)$$

من النظرية 2A وباستخدام المعادلة 2.15 نحصل على

$$\begin{aligned} P[\gamma(t) > x] &= P[\gamma(0) > x] + \int_0^t e^{-\nu s} \frac{d}{ds}\{e^{\nu s}e^{-\nu(s+x)}\} ds \\ &= P[\gamma(0) > x] \\ &= e^{-\nu x} \end{aligned}$$

3A نستطيع الان برهنة معكوس نظرية 3A في الفصل الرابع لان جميع العلاقـــات المطلوبة في البرهان متوفرة .

نظرية : 2B

اذا كانت ازمنة الوصول $\{T_n\}$ موزعة بصورة اسية وبمتوسط $1/\nu$. فان عملية العد التجديدي $\{N(t), t \ge 0\}$ ستكون عبارة عن عملية بواسون بكثافة تساوي ν

البرهان :

لكيْ نبرهن النظرية اعلاه نحتاج ان نبرهن توزيع الزيادة $N(t) - N(s)$ يكون ، حسب توزيع بواسون بمتوسط يساوي $\nu(t-s)$ لكل $t \geq s \geq 0,$ مهما كانت قيـــم $N(t')$ حيث $t' \leq s$.

ان

$$\{N(t) - N(s), t \geq s\}$$

عبارة عن عملية عد تجديدي (من المحتمل ان تكون تأخيرية) مماثلة الى المتغيرات العشوائية $T_1, T_2, \cdots$ حيث T_1 عبارة عن الفترة الزمنية من s. الى زمن وقوع اول حادثة بعد s وهكذا ان $T_2, T_3, \cdots$ موزعة حسب التوزيع الاسي بمتوسط $1/\nu$. نجد من المعادلة 2.14 ان توزيع T يكون حسب التوزيع الاسي وبمتوسط $1/\nu$ بغض النظرعن قيم $N(t')$ وان $t' \leq s$. وهكذا سيكون التوزيع المشروط لـ $N(t) - N(s)$ اذا علمت قيم $N(t')$ عندما $t' \leq s$ نفس التوزيع غير المشروط لـ $N(t-s)$

نحصل على البرهان المطلوب اذا اثبتنا ان $N(t)$ موزعة حسب توزيع بواسون بمتوسط νt. حيث $t > 0$. بما ان ازمنة الوصول $\{T_n\}$ موزعة حسب التوزيع الاسي بمتوسط $1/\nu,$ فان زمن الانتظار W_n للحادثة n يتبع قانون احتمال كاما ذي المعلمين ν وكما يلي :

$$f_{W_n}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \nu^n x^{n-1} e^{-x\nu}, \quad x > 0$$

$$1 - F_{W_n}(t) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} (\nu t)^m e^{-\nu t}, \quad t > 0.$$

اذن من المعادلة 3.8 في الفصل الرابع نحصل على 4

$$p_{N(t)}(n) = \frac{1}{n!} (\nu t)^n e^{-\nu t}$$

وان $N(t)$ موزعة حسب توزيع بواسون بمعدل νt.

ازمنة الوصول الموزعة حسب توزيع كاما :

توزيع كاما عبارة عن عائلة من التوزيعات ذات معلمين ويمكن ان تستخدم لتقريب اي توزيع عام لازمنة الوصول . وعلى هذا الإساس تعتبر عمليات العد التجديدي المماثلة

لازمنة الوصول الموزعة حسب توزيع كاما حالة خاصة لان القانون الاحتمالي لمثل تلك العملية يمكن حسابه مباشرة .

نفرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية عد تجديدي مقابلة لفجوات الوصول الزمنية الموزعة توزيعاً مستقلاً متماثلاً والتي تخضع لقانون احتمال كاما ذي المعلمين $\lambda > 0$ ، $k = 1, 2, \cdots$ ان للفجوة الزمنية كثافة احتمال مبينة ادناه

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\lambda}{(k-1)!}(\lambda t)^{k-1}e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \\ &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad t < 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

ان لزمن الانتظار حتى وقوع الحادثة n دالة توزيع مبينة ادناه :

$$1 - F_{W_n}(t) = \sum_{m=0}^{nk-1} \frac{1}{m!}(\lambda t)^m e^{-\lambda t} = \int_t^\infty \frac{\lambda^{nk} x^{nk-1}}{\Gamma(nk)} e^{-\lambda x}\, dx \tag{2.17}$$

وان لـ $N(t)$ دالة كثافة احتمال مبينة ادناه

$$p_{N(t)}(n) = \sum_{m=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{m!}(\lambda t)^m e^{-\lambda t}. \tag{2.18}$$

نحسب بعد ذلك دالة $N(t)$ المولدة للاحتمال :

$$\psi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P[N(t) = n]. \tag{2.19}$$

نفرض ان

$$G(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} F_{W_n}(t). \tag{2.20}$$

نتحقق مما يلي بسهولة (وذلك باستخدام المعادلة 3.8 في الفصل الرابـــــع)

$$\psi(z,t) = 1 + (z-1)\, G(z,t). \tag{2.21}$$

من المعادلة 2.17 نحصل على

$$G(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \int_0^t \frac{(\lambda x)^{nk-1}}{(nk-1)!} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= y^{1-k} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda x y)^{nk-1}}{(nk-1)!} \right) dx, \qquad (2.22)$$

حيث نعرف $y^k = z.$. نبسط صيغة الجمع في المعادلة 2.22 باستخدام ، الحقيقة الاتية :

لكل عدد حقيقي u وللعدد الصحيح k

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{nk-1}}{(nk-1)!} = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} \epsilon^r e^{u\epsilon^r}, \qquad (2.23)$$

حيث

$$\epsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right),\ \epsilon^0 = 1,\ \epsilon^r = \exp\left(\frac{2\pi i r}{k}\right). \qquad (2.24)$$

لكي نبرهن المعادلة 2.23 اوجد مفكوك $e^{u\epsilon^r}$ لمتوالية تيلر ثم استخدم الحقيقة الاتية (استخدم صيغة جمع المتواليات الهندسية)

$$\frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} (\epsilon^r)^{\nu} = 1$$ اذا كان ν مضاعفات k

$$= 0$$ اذا كان ν ليس من مضاعفات k.

نكتب من المعادلتين 2.22 ، 2.23 مايلي :

$$G(z,t) = y^{1-k} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \left(\frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} \epsilon^r e^{\lambda x y \epsilon^r} \right) dx$$

$$= y^{1-k} \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\epsilon^r}{1 - y\epsilon^r} \{1 - \exp[-\lambda t(1 - y\epsilon^r)]\}.$$

اذن نحصل على دالة $N(t)$ المولدة للاحتمال كما يلي :

$$\psi(z,t) = 1 + \left(\frac{z-1}{z}\right) \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{z^{1/k}\epsilon^r}{1 - z^{1/k}\epsilon^r} \{1 - \exp[-\lambda t(1 - z^{1/k}\epsilon^r)]\}. \qquad (2.25)$$

نوضح استخدام المعادلة 2.25 وذلك باعتبار الحالتين $k = 1$ $k = 2$ تقابل الحالة

$k=1$ التوزيع الاسي لفجوات الوصول الزمنية حيث يكون توزيع $N(t)$ معروفاً وحسب توزيع بواسون . نحصل من المعادلة 2.25 على

$$\psi(z,t)=1+\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z}{1-z}\right)\{1-\exp[-\lambda t(1-z)]\}$$
$$=\exp[\lambda t(z-1)],$$

والتي هي عبارة عن الدالة المولدة لاحتمال توزيع بواسون . في حالة $\epsilon^0=1$، $\epsilon^1=-1$ فان $\psi(z,t)$ يمكن ان يتحول الى الشكل الاتي

$$\psi(z,t)=\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)e^{\lambda t\sqrt{z}}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)e^{-\lambda t\sqrt{z}}\right\}$$
$$=e^{-\lambda t}\left\{\cosh(\lambda t\sqrt{z})+\frac{1}{\sqrt{z}}\sinh(\lambda t\sqrt{z})\right\}. \qquad (2.26)$$

من المعادلة 2.26 اذا كانت $\{N(t),t\geq 0\}$ تساوي عن عملية عد تجديدي تقابل الفجوات الزمنية المستقلة الموزعة بصورة متماثلة وبدالة كثافة احتمال .

$$f(x)=\lambda^2 xe^{-\lambda x},\ x>0, \qquad (2.27)$$

فان

$$E[N(t)]=\frac{\lambda}{2}t-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2\lambda t}, \qquad (2.28)$$

$$\mathrm{Var}[N(t)]=\frac{\lambda}{4}t-\frac{\lambda}{2}te^{-2\lambda t}$$
$$+\frac{1}{4}e^{-\lambda t}\sinh\lambda t-\frac{1}{4}e^{-2\lambda t}\sinh^2\lambda t. \qquad (2.29)$$

يمكن بصورة مباشرة او عن طريق تفاضل الدالة المولدة للاحتمال عندما تكون الفجوات الزمنية للوصول موزعة حسب توزيع كاما بكثافة مبينة في المعادلة 2.16 ان نثبت ما يلي :

$$E[N(t)]=\frac{\lambda t}{k}+\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1}\frac{\epsilon^r}{1-\epsilon^r}\{1-\exp[-\lambda t(1-\epsilon^r)]\}. \qquad (2.30)$$

تحدد دالة القيمة الوسطية لعملية العد التجديدي قانونها الاحتمالي :

ان لعملية العد التجديدي $\{N(t), t \geq 0\}$ المقابلة للتوزيع الاسي لفجوات الوصول الزمنية ذات المتوسط μ ، دالة قيمة وسطية

$$m(t) = E[N(t)] = \frac{t}{\mu}, \qquad (2.31)$$

والتي عبارة عن دالة خطية لـ t. ان السؤال الاتي هو الذي يفرض نفسه هل حقيقة ان دالة القيمة الوسطية لعملية العد التجديدي التي هي عبارة عن دالة خطية لـ t تعني ان الفجوات الزمنية للوصول موزعة حسب التوزيع الاسي ؟ نبرهن ماجاء اعلاه عن طريق اثبات ان دالة القيمة الوسطية لعملية العد التجديدي تحدد في الحقيقة قانونها الاحتمالي .

لكي نثبت ذلك ، نعرف اولا الدالة المولدة للعزوم $\psi_T(\theta)$ للفجوة الزمنية T (او بصورة مكافئة تحويل لابلاس – ستلجز لدالة التوزيع $F_T(t)$ للمتغير العشوائي T)

$$\psi_T(\theta) = \int_0^\infty e^{-t\theta} \, dF_T(t),$$

ان تحويل لابلاس – ستلجز $m^*(\theta)$ لدالة القيمة الوسطية

$$m^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-t\theta} \, dm(t).$$

مثلا ، اذا كانت

$$f_T(t) = \nu e^{-\nu t}, \quad t \geq 0$$

فان

$$\psi_T(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} \nu e^{-\nu t} \, dt = \frac{\nu}{\nu + \theta}.$$

اذا كانت

$$m(t) = \nu t$$

فان

$$m^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t}\, d(\nu t) = \nu \int_0^\infty e^{-\theta t}\, dt = \frac{\nu}{\theta}.$$

بما ان زمن الانتظار W_n يمكن ان يكون على شكل مجموع من المتغيرات العشوائية المستقلة $T_2 + \cdots + T_n,$ ذات دالة مولدة للعزوم $\psi_T(\theta)$ فان

$$\psi_{W_n}(\theta) = \{\psi_T(\theta)\}^n.$$

في حالة عملية العد التجديدي المتأخر فان

$$\psi_{W_n}(\theta) = \psi_{T_1}(\theta)\{\psi_T(\theta)\}^{n-1}.$$

على ضوء المعادلة 3.8 في الفصل الرابع نحصل على

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\{F_{W_n}(t) - F_{W_{n+1}}(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{W_n}(t). \qquad (2.32)$$

اذا اخذنا تحويل لابلاس – ستلجز لطرفي المعادلة 2.32 نحصل على

$$m^*(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{W_n}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\psi_T(\theta)\}^n. \qquad (2.33)$$

اذا كانت عملية العد التجديدي غير متأخرة . المجموع في المعادلة 2.33 عبارة عن مجموع متوالية هندسية وعلى هذا الاساس فان

$$m^*(\theta) = \frac{\psi_T(\theta)}{1 - \psi_T(\theta)}, \qquad (2.34)$$

ومنها نحصل على

$$\psi_T(\theta) = \frac{m^*(\theta)}{1 + m^*(\theta)}. \qquad (2.35)$$

بما ان تحويل لابلاس – ستلجز لدالة ما يحدد تلك الدالة بصورة وحيدة فاننا نحصل من المعادلة 2.35 على ان دالة القيمة الوسطية لعملية العد التجديدي تحدد قانون احتمال الفجوات الزمنية للوصول وبذلك تحدد قانون احتمال عملية العد التجديدي .

يجب ان نلاحظ ان اشتقاق المعادلة 2.35 من معادلة التجديد $m(t)$ يكون بسهولة (راجع النظرية 3C) .

المكملات :

2A متوسط العمر الزائد . اثبت ان الحل $g(t)$ لمعادلة التجديد

$$g(t) = m + \int_0^t g(t-s)\, dF_T(s), \tag{2.36}$$

يكون كما يلي (حيث m كمية ثابتة)

$$g(t) = m\{E[N(t)] + 1\}. \tag{2.37}$$

وهكذا نحصل على المساواة الآتية :

$$E[W_{N(t)+1}] = t + E[\gamma(t)] = E[T]\{E[N(t)] + 1\}. \tag{2.38}$$

تلميح : اثبت أن $g(t) = E[W_{N(t)+1}]$ تحقق المعادلة 2.36 حيث $m = E[T]$. استخدم المعادلة 2.37 للحصول على المعادلة 2.32 يرجع اصل هذا البرهان الى H. Scarf. . لمعرفة فوائد المعادلة 2.38 لنظرية التجديد راجع Smith (1958) ، ص 246.

2B الوجود الحقيقي لجميع عزوم عملية العد التجديدي :

نفرض أن $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية عد تجديدي مقابلة للفجوات الزمنية الموزعة بصورة مماثلة للمتغير العشوائي T . اثبت أن لكل $t > 0$.

(i) وجود عدد موجب θ_0 بحيث تكون الدالة المولدة للعزوم $E[\exp\{\theta N(t)\}]$ موجودة لجميع قيم $\theta \leq \theta_0$ وأن (ii) $E[\{N(t)\}^m]$ محدود لجميع الاعداد الصحيحة الموجبة .

تلميح : اختر C بحيث $P[T > C] > 0$. نفرض أن $\{T_n\}$ تتابع من المتغيرات العشوائية الموزعة بصورة متماثلة مستقلة والمعرفة كما يلي :

T_n' يساوي C أو يساوي صفراً حسب كون $T_n > C$ أو $T_n \leq C$. نفرض أن $\{N'(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عمليةعددتجديدي نسبة الى $\{T_n'\}$.

اثبت أن $N(t) \leq N'(t)$ لجميع قيم t وان لـ $N'(t) - r$ توزيع ذو الحدين السالب . حيث r عدد صحيح مناسب ويعتمد على t .

2C ان معرفة دالة القيمة الوسطية $m(t)$ لعملية العد التجديدي $\{N(t), t \geq 0\}$ تعني المعرفة الكاملة لقانونها الاحتمالي . من المعقول ان نعبر عن دالة العزم الثاني $m_2(t) = E[N^2(t)]$ بدلالة دالة القيمة الوسطية .

اثبت ان

$$m_2(t) = m(t) + 2 \int_0^t m(t-s)\, dm(s).$$

التمارين :

2.1 يسجل عداد الجزيئات النووية الجزئية الثانية فقط (ابتداء من الجزيئة الثانية التي ستصل العداد في اول الامر) . نفرض ان وصول الجزيئات عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة ν . نفرض ان $N(t)$ عبارة عن عدد الجزيئات المسجلة خلال الزمن t . اوجد احتمال ان $N(t)$ عدد وترى .

2.2 اثبت ان في حالة عملية العد التجديدي المتأخرسنحصل على المعادلة الاتية :

$$m^*(\theta) = \frac{\psi_{T_1}(\theta)}{1 - \psi_T(\theta)}.$$

بدلا من المعادلة 2.34

2.3 ايجاد دالة القيمة الوسطية من خلال عكس inverting تحويل لابلاس ستلجز :
تأمل عملية الحد التجديدي المتأخر $\{M(t), t \geq 0\}$ المعرفة في المثال 1E . اثبت ان

$$\psi_T(\theta) = \left\{1 + \frac{\theta}{\nu} e^{(\nu+\theta)L}\right\}^{-1}, \qquad \psi_{T_1}(\theta) = \frac{\nu}{\nu+\theta},$$

$$m^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-t\theta}\, dE[M(t)] = \frac{\nu}{\theta(\nu+\theta)} \{\theta + \nu\, e^{-(\nu+\theta)L}\}.$$

اثبتمن خلال حساب تحويل لابلاس – ستلجز ما يلي :

$$\begin{aligned} m(t) = E[M(t)] &= 1 - e^{-\nu t} && \text{for} \quad t \leq L \\ &= 1 - e^{-\nu L} + \nu\, e^{-\nu L}(t - L) && \text{for} \quad t \geq L \end{aligned}$$

5-3 نظريات الغاية لعمليات العد التجديدي :

ان لعمليات العد التجديدي $\{N(t), t \geq 0\}$ مزايا جيدة ونستطيع ان نذكر خواصها المقاربة (عندما تكون t كبيرة) بسهولة .

نظريـــة : 3A

نفرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية عد تجديدي (من المحتمل ان يكون متأخراً) نسبة الى الفجوات الزمنية للوصول $\{T_n, n = 1, 2, \cdots\}$ بحيث يكون $T_2, T_3, \cdots$ مماثل التوزيع كالمتغير العشوائي T .

التعبير المقارب للمتوسط $m(t) = E[N(t)]$: اذا كان $\mu = E[T] < \infty$ فان

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \tag{3.1}$$

في الحقيقة يتحقق قانون الاعداد الكبيرة

$$P\left[\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right] = 1. \tag{3.2}$$

التعبير المقارب للتباين $\operatorname{Var}[N(t)]$: اذا كان $\mu = E[T]$ $\sigma^2 = \operatorname{Var}[T]$ محدودان فان

$$\text{غـا}_{t\to\infty} \frac{\operatorname{Var}[N(t)]}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}. \tag{3.3}$$

التقارب الطبيعي لعملية التجديد : اذا كانت $E[T^2] < \infty$ فان لاي x حقيقي

$$\lim_{t\to\infty} P\left[\frac{N(t) - (t/\mu)}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} \leq x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(1/2)y^2}\, dy. \tag{3.4}$$

نعني بالمعادلة 3.4 بعبارة اخرى ان $N(t)$ موزعة بصورة مقاربة حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين مقاربان مبينان بالمعادلتين 3.1 ، 3.3 .

يحتاج برهان هاتين النظريتين اساليب رياضية خارج نطاق هذا الكتاب ولذلك

حذف هذان البرهانين (راجع بحث Smith [1958] للحصول على تطور هذه النظريات) .يمكنك الحصول على نقاط رئيسية لبرهان المعادلتين 3.2 ، 3.4 وذلك في البند 6-9 .

نوضح معنى المعادلتين 3.1 ، 3.3 باعتبار عمليات العد التجديدي $\{N(t), t \geq 0\}$ المقابلة للفجوات الزمنية للوصول والموزعة حسب توزيع كاما بالمعلمتين λ ، $2. = \cdot$.نبين في المعادلتين 2.28 2.29 الصيغتين الدقيقتين لمتوسط وتبايـــن $N(t)$ كما يلي :

$$\underset{t\to\infty}{\text{غـا}} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{\lambda}{2},$$
$$\underset{t\to\infty}{\text{غـا}} \frac{\text{Var}[N(t)]}{t} = \frac{\lambda}{4}.$$

نحصل على الصيغتين بصورة مباشرة من المعادلتين 3.1 3.3 لان لدالـة كثافة الاحتمال) معادلة 2.27. متوسط $\mu = 2/\lambda$ وتباين $\sigma^2 = 2/\lambda^2$.

مثال : 3A

تصحيحات للعد غير المسجل :

تأمل عداد الجزيئات النووية ذا زمن الخمود الثابت L حيث يكون وصول الجزيئات عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة ν عندما يكون زمن المشاهدة t طويلاً فاننا نعتبر العدد الحقيقي للجزيئات المسجلة $M(t)$ مقارباً الى t/μ, وذلك في المعادلة 3.2 حيث μ متوسط الفجوة الزمنية بين وصول الجزيئات . نثبت في حالة عداد النوع (راجع التمرين 1.2) آن

$$\mu = L + \frac{1}{\nu} = \frac{1 + \nu L}{\nu},$$

بينما اثبتنا في حالة العداد من النوع في المثال 1E أن

$$\mu = \frac{1}{\nu} e^{\nu L} \doteq \frac{1 + \nu L}{\nu} \quad \text{if} \quad \text{is small.}$$ اذا كانت νL صغيرة

نتبع الخطوات الآتية لتقدير ν مـن $M(t)$. نفرض أن

$$\hat{\nu} = \frac{M(t)}{t}$$

عبارة عن الكثافة المشاهدة لتسجيل الحوادث . باستخدام المعادلة 3.2 تكتب بصورة تقريبية ،

$$\hat{\nu} \doteq \frac{1}{\mu}.$$

تكون $\hat{\nu}$ في حالة العداد من النوع I كما يلي :-

$$\hat{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu L}$$

بحيث

$$\nu = \frac{\hat{\nu}}{1 - \hat{\nu} L}. \qquad (3.5)$$

نستخرج ν في حالة عداد النوع II من المعادلة

$$\hat{\nu} = \nu e^{-\nu L}.$$

اذا افترضنا ان νL صغيرة . فتحصل من المعادلة 3.5 على ν في حالتي العدادين . للحصول على الكثافة الحقيقية ν لوصول الجزيئات سنعتبر المعادلة 3.5 على انها التصحيح المطلوب لكثافة المشاهدة $\hat{\nu}$ للجزيئات المسجلة .

راجع كتاب Smith سنة (1957) Takács سنة (1958) للحصول على طبيعة عدد الجزيئات المسجلة في العداد عندما يكون توزيع زمن الخمود اعتبارا ويكون توزيع زمن الوصول من نوع بواسون . مناقشة التطبيقات الشاملة لنظرية التجديد في العدادات تجدها في كتاب

تؤدي نظرية الغاية التالية دورا مهما في تطبيقات نظرية التجديد سنذكرها بدون برهان

نظرية 3B

اذا كان زمن الفجوة T غير lattice random وان له متوسطا μ محدوداً فان لاي $h > 0$

---

* (ان كلمة) lattice عبارة عن متغير عشوائي متقطع له الخاصية الاتية جميع قيم x التي يأخذها X باحتمال موجب تكون بالشكل $x = kh$ حيث h عدد حقيقي . k عدد صحيح . مثال . المتغيرات العشوائية ذات القيم العددية الصحيحة هي متغيرات lattice

$$\underset{t\to\infty}{\text{غا}}\; m(t+h) - m(t) = \frac{h}{\mu}\cdot \qquad (3.6)$$

بصورة اعم ، لاي دالة تحقق الشروط

(i) لجميع $t > 0$ ، $Q(t) \geq 0$

(ii) $\int_0^\infty Q(t)\,dt < \infty,$

(iii) $Q(t)$ غير تنازلية (اي ان $Q(t)$ اذا كان

فان

$$\underset{t\to\infty}{\text{غا}} \int_0^t Q(t-s)\,dm(s) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty Q(s)\,ds. \qquad (3.7)$$

تسمى المعادلة 3.6 بنظرية Blackwell لان اول من برهنها هو Blackwell (1948) اما المعادلة 3.7 فتسمى بنظرية التجديد الرئيسية *key renewal theorem* (راجع Smith [1958] ص 247 حيث يمكن استنتاج عدد كبير من النتائج من المعادلة 3.7).

راجع مناقشة Takács لبحث Smith لكي تستطيع برهنة المعادلة باستخدام المعادلة 3.6 .

نظرية 3C

نفرض ان $m(t)$ عبارة عن دالة القيمة الوسطية لعملية العد التجديدي المقابلة للفجوات الزمنية للوصول الموزعة بصورة مستقلة ومتماثلة وبدالة توزيع $F(x)$ ليست من نوع lattice ومتوسط محدود μ .نفرض ان $g(t)$ عبارة عن دالة تحقق معادلة التجديد

$$g(t) = Q(t) + \int_0^t g(t-s)\,dF(s). \qquad (3.8)$$

ان $g(t)$ ستعطي بالمعادلة

$$g(t) = Q(t) + \int_0^t Q(t-s)\,dm(s). \qquad (3.9)$$

اذا حققت $Q(t)$ الافتراضات (i) . (ii) . (iii) من النظرية 3B فان

$$\underset{t\to\infty}{\text{غا}}\; g(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty Q(s)\,ds. \qquad (3.10)$$

البرهان :

بأخذ تحويل لابلاس ستلجز لطرفي المعادلة 3.8 نحصل على

$$g^*(\theta) = Q^*(\theta) + g^*(\theta)\psi(\theta),$$

حيث

$$g^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-t\theta}\, dg(t),\ Q^*(\theta) = \int_0^\infty e^{-t\theta}\, dQ(t),$$
$$\psi(\theta) = \int_0^\infty e^{-t\theta}\, dF(t).$$

اذن

$$g^*(\theta) = \frac{Q^*(\theta)}{1-\psi(\theta)} = Q^*(\theta) + Q^*(\theta)\frac{\psi(\theta)}{1-\psi(\theta)}. \qquad (3.11)$$

بما ان تحويل لابلاس ستلجز $m^*(\theta)$ لـ $m(t)$، يحقق

$$m^*(\theta) = \frac{\psi(\theta)}{1-\psi(\theta)},$$

عندما نعكس inverting المعادلة 3.11 نحصل على المعادلة 3.9 .تتحقق صحة المعادلة 3.10 باستخدام المعادلة 3.9 ونظرية التجديد الرئيسية .

مثال : 3B

التوزيع المقارب للعمر الزائد .

اثبتنا في المعادلة 2.11 ان

$$g(t,x) = P[\gamma(t) > x]$$

تحقق معادلة التجديد

$$g(t,x) = 1 - F(t+x) + \int_0^t g(t-s,x)\, dF(s).$$

وهكذا من المعادلة ,3.10 نحصل على

$$\underset{t\to\infty}{\text{غا}} P[\gamma(t) > x] = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \{1 - F(s+x)\}\, ds$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_x^\infty \{1 - F(y)\}\, dy$$

وان

$$\underset{t\to\infty}{\text{غا}} P[\gamma(t) \le x] = \int_0^x \frac{1}{\mu}\{1 - F(y)\}\, dy.$$

وهكذا يخضع العمر الزائد t, بصوره تقريبية عندما تكون $\gamma(t)$ كبيرة لقانون الاحتمال المحدد بدالة كثافة الاحتمال .

$$\frac{1}{\mu}\{1-F(x)\}, \quad x \geq 0.$$

مثال 3C

الاحتمال المقارب لعطب وتصليح النظام :

تأمل نظاماً في احدى حالتين وهما حالة عمل"on" او حالة عطب "off.". يكون النظام في الزمن صفراً في حالة تحمل ويستمر في هذه الحالة مدة عشوائية T_{on} وبدالة توزيع $F_{on}(t)$. ويبقى النظام في حالة عطب مدة عشوائية قبل تصليحه ونطلق على هذه المدة العشوائية T_{off} وبدالة توزيع $F_{off}(t)$. ثم تستمر العملية (للحصول على وصف للنظام بصيغة اخرى راجع المثال $4A$ في الفصل الاول) نفترض في الازمنة المتابعة لعطب النظام وتصليحه ان تكون مستقلة . نرغب الان في ايجاد الاحتمال $g(t)$ لعمل النظام في الزمن t .

نستطيع الان ايجاد معادلة تجديد تحققها $g(t)$. نفرض ان $T =: T_{on} + T_{off}$ عبارة عن المدة الزمنية من صفر الى ان يكون النظام في حالة عمل بعد ان اجري تصليحه وافرض ان $F(t)$ عبارة عن دالة توزيع ذلك الزمن . ان

$$g(t) = \int_0^\infty P[\text{النظام في حالة عمل في الزمن } t \mid T = s]\, dF(s)$$

الان

$$\begin{aligned} t \mid T = s] &= g(t-s) \text{ if } s \leq t \\ &= P[t < T_{on} \mid T = s] \text{ if } s > t; \\ \int_t^\infty P[t < T_{on} \mid T = s]\, dF(s) &= P[t < T_{on} \quad \text{and} \quad t < T] \\ &= P[t < T_{on}] = 1 - F_{on}(t). \end{aligned}$$

اذن . تحقق $g(t)$ معادلة التجديد

$$g(t) = 1 - F_{on}(t) + \int_0^t g(t-s)\, dF(s).$$

افترض عدم عشوائية
وان لـ T متوسطاً محدوداً يساوي μ من المعادلة 3.10 نحصل على

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \{1 - F_{on}(t)\}\, dt = \frac{E[T_{on}]}{E[T_{on} + T_{off}]}.$$

الاحتمال المقارب لعمل النظام يساوي نسبة متوسط عمل النظام الى متوسط الفجـــوة الزمنية بين دورتي عمل .

التمارين :

3.1 نفرض ان $N(t)$ تمثل عدد الجزيئات المسجلة في الفترة t بمقياس s للدائرة العامة
(راجع المثال 1C) وان وصول الجزيئات عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة ν .
اوجد بصورة تقريبية متوسط وتباين $N(t)$.

3.2 تأمل العداد نوع "I" ذا ازمنة الغلق المتابعة $Y_1, Y_2, \cdots$ وهي عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي Y بعزوم ثانية محدودة نفترض ان وصول الجزيئات عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة λ . نفرض ان $M(t)$ تمثل عدد الجزيئات المسجلة في الزمن t .اثبت ان

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[M(t)]}{t} = \frac{\lambda}{1+\lambda E[Y]}, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}[M(t)]}{t} = \lambda\, \frac{1+\lambda^2\,\mathrm{Var}[Y]}{(1+\lambda E[Y])^3}.$$

3.3 نفرض ان $F(x)$ دالة توزيع المتغير العشوائي غير السالب ذي المتوسط المحدود μ والعزم الثاني μ_2 .اثبت ان

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\mu}\{1 - F(x)\} && \text{for } x \geq 0 \\ &= 0 && \text{for } x < 0 \end{aligned}$$

عباره عن دالة كثافة احتمال بمتوسط يساوي

$$\int^\infty xg(x)\, dx = \frac{\mu_2}{2\mu}.$$

في ضوء هذه النتيجة اذا كانت عملية العد التجديدي مقارنة بالفجوات الزمنية بين وصولين حيث ان هذه الفجوات عبارة عن متغيرات غير عشوائية — not

lattice ، لها متوسطات محدودة تساوي $E[T]$ وعزوم ثانية $E[T^2]$، فان لعمره الزائد $\gamma(t)$ متوسطاً يحقق

$$\underset{t\to\infty}{\text{غـا}}\ E[\gamma(t)] = \frac{E[T^2]}{2E[T]}.$$

3.4 الحد الثاني في مفكوك دالة القيمة الوسطية :

تحقق دالة القيمة الوسطية لعملية العد التجديدي مقارنة بالفجوات التي هي عبارة عن متغيرات غير lattice لها متوسط وعزم ثاني محدودان هما μ ، μ_2 على الترتيب ،

$$\underset{t\to\infty}{\text{غـا}}\left\{m(t) - \frac{t}{\mu}\right\} = \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1.$$

برهن الصيغة اعلاه وذلك بتطبيق نظرية التجديد الرئيسية على الصيغة الاتية :

$$Q(t) = \int_t^\infty \frac{1}{\mu}\{1 - F(s)\}\ ds = 1 - \int_0^t \frac{1}{\mu}\{1 - F(s)\}\ ds.$$

تلميح : اثبت ثم استخدم الحقيقة الاتية :

$$\int_0^t Q(t-s)\ dm(s) = m(t) - \frac{t}{\mu} + \{1 - Q(t)\}.$$

3.5 احتمال عدم غلق العداد نوع II

تأمل عداد النوع II حيث تكون ازمنة الغلق المتتابعة للعداد عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي Y بعزم ثان محدود . نفترض ان وصول الجزيئات عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة λ .

نفرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية تصادفية معرفة كما يلي :

$X(t) = 1$ اذا كان العداد غير مغلق في الزمن t

$= 0$ اذا كان العداد مغلقاً في الزمن t

نفرض ان $M(t)$ تمثل عدد الجزيئات المسجلة في الفترة من صفر الى t .

نفرض ان $m(t) = E[M(t)]$، ونفرض ان $p(t) = P[X(t) = 1]$.

اثبت ان

$$\text{(i)}\qquad \frac{d}{dt}m(t) = \lambda p(t), \quad m(t) = \lambda \int_0^t p(s)\ ds;$$

$$\text{(ii)}\qquad p(t) = \exp\left\{-\lambda \int_0^t [1 - F_Y(y)]\ dy\right\};$$

(تلميح : استخدم نظرية عمليات بواسون المرشحة)

(iii) للفجوات الزمنية بين تسجيل الجزيئات متوسط يساوي

$$\frac{1}{\lambda}\exp\{\lambda E[Y]\};$$

(iv) يمثل المتغير العشوائي (مغلق T) المدة الزمنية لغلق العداد (في لحظة تسجيل الجزيئة الى ان يصبح العداد غير مغلق) وان لهذا المتغير متوسطاً يساوي

$$\frac{1}{\lambda}\exp\{\lambda E[Y]\} - \frac{1}{\lambda};$$

(v) للمتغير العشوائي (مغلق v) متوسط يساوي $\frac{1}{\lambda p}[\exp\{\lambda p E[Y]\} - 1]$.

في حالة العداد نوع p .

الفصل السادس

متسلسلات ماركوف : المعلم المتقطع

يؤدي اساس الحتمية العلمية دوراً مهماً في الفيزياء الكلاسيكية تستخرج حالة النظام في لحظة في الزمن t اذا علمنا حالته الفيزيائية في الزمن t_0. وهكذا نحصل على طريقة اساسية لتحليل الانظمة الفيزيائية : نستنتج الحالة الفيزيائية للنظام في الزمن المعلوم t_0 من خلال معرفة حالته في اي زمن سابق(اولاحق) t_1 وان حالة النظام هذه لاتعتمد على حركة النظام قبل (او بعد) زمن t_1.

نستطيع ان نجد اساساً مماثلاً اذا علمنا ان الانظمة الفيزيائية تخضع لقوانين الاحتمال بدلاً من القوانين غير الاحتمالية (حيث لايمكن ايجاد قيم معكوسة للزمن) نستنتج احتمال كون النظام الفيزيائي في حالة معلومة عند زمن معلوم t_2 من خلال معرفة حالة النظام في اي زمن سابق t_1. وان هذه الحالة لاتعتمد على حركة النظام قبل الزمن t_1 تسمى العمليات التصادفية التي تمثل مشاهدات للانظمة الفيزيائية وتحقق الشروط اعلاه بعمليات ماركوف .

نوع معين من انواع عمليات ماركوف يسمى بمتسلسلة ماركوف Markov chain وتعرف بانها عملية تصادفية تخضع لسلسلة من الأنتقالات بين قيم معينة (تسمى بـ حالة "states" العملية) ومن خواصها ان القانون الاحتمالي لشكل العملية المستقبلي يعتمدعلى الحالة فقط وليس على كيفية وصوله العملية الى تلك الحالة اذا علمنا ان العملية في حالة معطاة .تكون عدد الحالات اما محدودة او لامحدودة يمكن حسابها .

تستخدم الاساليب الرياضية في هذا الفصل اكثر من بقية فصول هذا الكتاب لان الفرض الاساسي هو اعطاء مفهوم تطور الصيغ الاساسية لنظرية متسلسلات ماركوف المتقطعة المعلم .

6-1 التعريف الاساسي لعملية ماركوف :

يقال ان العملية التصادفية ذات المعلم المتقطع $\{X(t), t = 0, 1, 2, \cdots\}$ او العملية التصادفية ذات المعلم المستمر $\{X(t), t \geq 0\}$ بانها عملية ماركوف لاية مجموعة

من النقاط الزمنية $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ اذا كان توزيع $X(t_n)$، المشروط لقيم $X(t_1), \cdots, X(t_{n-1})$ المعلومة يعتمد على $X(t_{n-1})$ فقط . بعبارة ادق ، لاي عدد من الاعداد الحقيقية $x_1, \cdots, x_n$

$$P[X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) = x_1, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}] \\ = P[X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}]. \quad (1.1)$$

نوضح المعادلة 1.1 كما يلي : اذا اعطيت حالة العملية في الوقت الحاضر فان حالتها في المستقبل « لاتعتمد » على حركة العملية في السابق .

تصنف عمليات ماركوف حسب (i) طبيعة العملية (فيما اذا كانت متقطعة المعلم اومستمرة المعلم (ii) طبيعة فضاء حالة العملية *state space* process

يقال ان العدد الحقيقي x عبارة عن قيمة ممكنة ، اوحالة state للعملية التصادفية $\{X(t), t \in T\}$ ان وجد زمن t ينتمي الى T بحيث يكون الاحتمال $P[x - h < X(t) < x + h]$ موجباً لكل $h > 0$ يطلق علىمجموعة القيم الممكنة للعملية بفضاء تلك الحالة . يسمى فضاء الحالة بالفضاء المتقطع اذا كان يحتوي على عدد محدود اولا محدود يمكن حسابه من الحالات . اما فضاء الحالة غير المتقطع فيسمى بالمستمر . تسمى عملية ماركوف ذات فضاء حالة متقطع بمسلسلة ماركوف *Markov chain* تستعمل غالباً مجموعة الاعداد الصحيحة $\{0, 1, \cdots\}$ لتعني فضاء حالة متسلسلة ماركوف

جدول 6.1. تصنف عمليات ماركوف الى اربعة انواع اساسية

فضاء الحالة

		متقطــع	مستمــر
طبيعة المعلم	متقطع	متسلسلة ماركوف متقطعة المعلم	عملية ماركوف متقطعة المعلم
	مستمر	متسلسلة ماركوف مستمرة المعلم	عملية ماركوف مستمرة المعلم

توصف عملية ماركوف بدالة الاحتمال الانتقالي *transition probability function* ويرمز لها غالباً بالرمز $P(x,t_0;E,t)$ او $P(E,t \mid x,t_0)$ التي تمثل الاحتمال المشروط لكون حالة النظام في الزمن t تنتمي الى E اذا اعطيت ان النظام في حالة x في الزمن $t_0(<t)$. يقال ان لعملية ماركوف احتمالات انتقالية ثابتة *stationary transition probabilities* او انها متجانسة الزمن *homogene-ous* اذا اعتمدت $P(x,t_0;E,t)$ على t_0، t فقط خلال الفرق $(t-t_0)$.

توجدبحوث كثيرة حول عمليات ماركوف وخصوصاً الاسس الرياضية لهذه – النظرية من جانب ، وتطبيقات هذه النظرية من جانب اخر .نوضح في هذا الكتاب كيفية ظهورعمليات ماركوف كنماذج للظواهر الطبيعية .ندرس في هذا المجال متسلسلات ماركوف وذلك لسهولة الرياضيات المتعلقة بها .ندرس بصورة رئيسية ما يلي :

(i) سلوك التبعية او الانتقال الزمنية لمتسلسلة ماركوف . نجد دالة الاحتمال الانتقالي وذلك بايجاد وحل المعادلات التي تحقق (دوالاً تفاضلية تكاملية . او انواع اخرى) .

(ii) السلوك الطويل المدى (او الحالة المستقرة) لمتسلسلة ماركوف بصورة خاصة تحديد شروط وفقاً لهذه الشروط سيوجد احتمال يقاس بـ $\pi(E)$ بحيث تكون للغاية

$$\lim_{t\to\infty} P(x,t_0;E,t) = \pi(E)$$

قيمة حقيقية مستقلة عن $t_0; x$

(iii) سلوك التواجد الزمني وازمنة الدور الاول . ندرس التوزيعات الاحتمالية لكمية الوقت الذي استغرقته المتسلسلة في الحالات المختلفة (ومجموعات الحالات) وطول الزمن اللازم لعبور النظام من مجموعة حالات الى مجموعة حالات اخرى

. مثال 1A

متسلسلة ماركوف المتقطعة المعلم :

تأمل نظاما فيزيائيا يشاهد في مجموعة متقطعة من الازمنة . ارمزللمشاهدات المتتابعة بالرموز $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$. يفترض ان يكون X_n متغيراً عشوائياً . تمثل

قيمة X_n حالة النظام الفيزيائي في الزمن n . يطلق على التابع $\{X_n\}$ بالمتسلسلة chain اذا امكننا افتراض وجود عدداً محدود اولا محدود يمكن حسابه من حالات النظام فقط . ان التابع $\{X_n\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف اذا كان كل متغير عشوائي X_n متقطعاً ويحقق الشرط الاتي :لكل عدد صحيح $m > 2$ ولكل نقطة من النقاط m عندما $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ فان التوزيع المشروط للمتغير X_{n_m} اذا علمنا قيم $X_{n_1}, \cdots, X_{n_{m-1}}$ يعتمد على $X_{n_{m-1}}$ فقط بعبارة خاصة فان لكل عدد حقيقي $x_0, x_1, \cdots, x_m$ تتحقق صحة ما يلي :

$$P[X_m = x_m \mid X_0 = x_0, \ldots, X_{m-1} = x_{m-1}] = P[X_m = x_m \mid X_{m-1} = x_{m-1}], \quad (1.2)$$

عندما تكون الجهة اليسرى من المعادلة 1.2 معرفة .

مثال : 1B :

متسلسلة ماركوف المتداخلة An imbedded Markov

مثال لمتسلسلة ماركوف تأمل عدد الاشخاص في نظام انتظار . افرض وجود دائرة يعد فيها موظف واحد وان وصول الزبائن عبارة عن حوادث من نوع بواسون بكثافة λ. افرض ان – ازمنة خدمة الزبائن المتتابعين عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع . افرض ان X_n عندما $n \geq 1$ تمثل عدد الاشخاص في صف الانتظار في لحظة تقديم الخدمة للزبون رقم n (في يوم معلوم) وانتهاء تلك الخدمة . ان التابع $\{X_n\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف نبرهن ذلك باثبات ان توزيع X_{n+1} المشروط اذا علمت قيم $X_1, X_2, \cdots, X_n$ يعتمد على قيمة X_n فقط. افرض ان U_n تمثل عدد الزبائن الذين يصلون دائرة البريد خلال زمن خدمة الزبون رقم n . اذن نكتب ما يلي

$$X_{n+1} = X_n - \delta(X_n) + U_{n+1}, \quad (1.3)$$

حيث نعرف

$$\delta(x) = 1 \qquad \text{if } x \neq 0$$
$$= 0 \qquad \text{if } x = 0. \quad (1.4)$$

بعبارة اخرى يعتمد عدد الزبائن في صف الانتظار عندما يترك الزبون $(n+1)$ النظام على كون الزبون $(n+1)$ موجودا في صف الانتظار عندما انهى الزبون n خدمته . اذا كانت $\delta(X_n) = 0$ فان $X_{n+1} = U_{n+1}$ بينما اذا كانت $\delta(X_n) = 1$ فان $X_{n+1} = U_{n+1} + X_n - 1$

بما ان U_{n+1} لاتعتمد على $X_1, \cdots, X_n$ فاننا لانحتاج الى معرفة قيم $X_1, \cdots, X_{n-1}$ اذا علمنا قيمة X_n من اجل تحقيق التوزيع الاحتمالي المشروط ل X_{n+1}

تعرف متسلسلة ماركوف $\{X_n\}$ المعرفة بالمعادلة 1.3 بـ imbedded Markov نسبة الى مشاهدة العملية التصادفية $\{N(t), t \geq 0\}$ في التتابع الزمني $\{t_n\}$ المقابل للحظات المتابعة لمغادرة الزبائن حيث $N(t)$ تمثل عدد الزبائن في صف الانتظار في الزمن t . تكتب بالرموز ما يلي :

$$X_n = N(t_n) \qquad (1.5)$$

مثال 1C

متسلسلات ماركوف المستمرة المعلم – تأمل مجتمعاً ما ، مثل مجتمع الجزيئات الموجودة في حجم جزئي لغاز معين .

الجزيئات المنبعثة من مصدر مشع ، الكائنات البايولوجية الحية لنوع معين في محيط معين ، الزبائن في صف الانتظار ،..الخ .نفرض ان $X(t)$ عندما $t \geq 0$ تمثل حجم المجتمع في الزمن t .وهكذا فان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية قيمة عددية صحيحة .لكل $t \geq 0$ تكون قيم $X(t)$ الممكنة هي الاعداد الصحيحة $\{0, 1, 2, \cdots\}$ اذا كانت $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بواسون كما هو الحال مثلا عندما تكون $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية بتزايد مستقل فان تلك العملية عبارة عن عملية ماركوف .من اجل اعطاء تعريف اساسي لمفهوم عملية ماركوف وتسلسلة ماركوف اقتصرنا على دراسة المتغيرات العشوائية ذات القيم الحقيقية فقط .يأتي المفهوم الواسع لعملية ماركوف من خلال تطبيقاتها للعمليات التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ او $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ حيث تكون للعناصر العشوائية $X(t)$ او X_n قيم اخرى عدا الاعداد الحقيقيـة .

مثال 1D

كتابة اللغة لمتسلسلة ماركوف المتعددة . نستطيع تقسيم حروف الهجاء الى قسمين

وهما حروف العلة وحروف السكون .افرض اننا نمثل حرف العلة بالرقم صفر ،وحرف السكون بالرقم 1 .ان صفحة اي كتاب ستكون على شكل تتابع من الارقام صفر ،١. ان حروف العلة والسكون تكون متسلسلة لماركوف اذا علمنا مجموعة من الحروف فان احتمال كون الحرف القادم حرف علة اوسكون (صفر او ١) هو نفس احتمال كـون الحرف القادم علة او سكون بمعرفة طبيعية الحرف الاخير من المجموعة فقط لايمكن تطبيق هذه الحالة في لغات كثيرة ولكن يمكن تطبيقها في اللغات البسيطة مثل اللغة

الساموائية .من المعروف ان حروف العلة والسكون في اللغة الساموائية تكون متسلسلة لماركوف حيث لايمكن حدوث حرف سكون بعد حرف سكون سابق وان حدوث حرف علة بعد حرف علة سابق يكون احتمال 0.51 (كما ذكر ذلك Miller [1952]) من كتاب Newman) .

تامل وجود مجموعات متتابعة من الحروف .اي مجموعة متكونة من r حرف تمثل بـ r مركبة $(z_1, \cdots, z_r)$ حيث ان كل z_i عبارة عن صفر او ١ .

يوجد 2^r حالة ممكنة للمجموعة الواحدة .ان اي تتابع متكون من n حرف سيؤدي الى وجود $n-r+1$ مجموعة ذات r حرف .وهكذا فان العبارة stochastic processes المتكونة من 19 حرف ،تؤدي الى وجود 18 مجموعة ولكل مجموعة 2 حرف وكما يلي

$$(1,1),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,0),\ (0,1),$$
$$(1,1),\ (1,1),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,0),\ (0,1).$$

يقال ان متوالية الحروف الاصلية تكون متسلسلة ماركوف المتعددة برتبة r اذا كانت المتوالية عبارة عن مجموعات ذات -r حرف تكون متسلسلة لماركوف بالمعنى الاتي : احتمال كون المجموعة القادمة من نوع معين لاي مجموعات (ذات r مركبة) هو نفس احتمال كون المجموعة من نوع معين بمعرفة طبيعة المجموعة الاخيرة فقط . توجدعدة اختبارات مختلفة لتحديد رتبه متسلسلة ماركوف المتعددة (راجع كتاب الدرسن وكودمان [1957] وكتاب Billingsley [1961]) .ان مثل هذه الاختبارات تكون عبارة عن وسيلة لمعرفة كفاءة اللغات في نقل المعلومات .

مثال 1E

مشاكل صيانة الانظمة :.

. نحصل باستخدام متسلسلات ماركوف على وسيلة قوية لدراسة تأثيرات القوانين المختلفة على التشغيل ،العطب وتصليح اي نظام مثل الحاسبات الالكترونية او قطع لماكنة ما . نحاول ان نجد تعريفا مناسبا لمفهوم الحالة وذلك لجعل تتابع مشاهدات حالة النظام لتكوين متسلسلة لماركوف . احدى الطرق الممكنة هي اعتبار $\{1, 2\}$ فضاء حالة حيث

حالة 1 تعني الحالة الجديدة للنظام .
حالة 2 تعني حالة تصليح النظام .

ويشمل هذا النموذج مختلف تعقيدات عطب وتصليح الانظمة من اجل تكوين متسلسلة ماركوف .مثلا قد يكون عطب النظام في حالتين الحالة الاولى تحتاج الى فترة زمنية واحدة لتصليحها والحالة الثانية تحتاج الى عدة فترات زمنية .او الى نظام انتاجي يمر بمراحل عطب مختلفة يمكن تلافيها من خلال الفحص الدوري والصيانة المحافظة، نتيجة لذلك تحتاج الى تكوين افتراضات اخرى لكي نستطيع معاملة سلوك النظـــام لمتسلسلة ماركوف .

المناقشة النظامية حول تحويل العمليات التصادفية الى عمليات ماركوف المتعددة بوجود المتغيرات المكملة تجدها في كتاب Cox (1955) .

تمـاريـــن :

اذكر فصل العمليات التصادفية الموصوفة في التمارين 1.1 الى 1.4 هي (i) عملية ماركوف (ii) متسلسلة ماركوف .اشرح السبب .

1.1 عندما يكون $X_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \quad n = 1, 2, \cdots$ حيث $\{U_n\}$ عبارة عـــن تتابع من المتغيرات العشوائية المستقلة (i) كل منها طبيعي التوزيع (ii) لكـــل متغير قيمة تساوي صفراً او 1 باحتمال p ، q على الترتيب

1.2 عندما تكون $X_n = \{U_1 + U_2 + \cdots + U_n\}^2 \; n = 1, 2, \ldots$ حيث $\{U_n\}$ عبارة عن تتابع من المتغيرات العشوائية المستقلة .

1.3 $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن (i) عملية وينر (ii) عملية بواسون .

1.4 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ عبارة عن حل معادلة الفرق التصادفية $X_n = \rho X_{n-1} + I_n$ حيث ρ كمية ثابتة معلومة $X_0 = 0$, $\{I_n, n = 1, 2, \cdots\}$ عبارة تتابع من المتغيـــرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع .

6-2 الاحتمالات الانتقالية ومعادلة جابمان – كولموكوروف :

لاجل تحديد قانون احتمال متسلسلة ماركوف المتقطعة المعلم $\{X_n\}$ نجد دالة كتلة احتمالها في جميع الازمنة $0 \leq m \leq n$ والحالتين j, k وكما يلي :

$$p_j(n) = P[X_n = j] \qquad (2.1)$$

وان دالة كتلة الاحتمال المشروط كما يلي

$$p_{j,k}(m,n) = P[X_n = k \mid X_m = j]. \tag{2.2}$$

يطلق على الدالة $p_{j,k}(m,n)$ بدالة الاحتمال الانتقالي لمتسلسلة ماركوف . يتحدد قانون احتمال متسلسلة ماركوف بواسطة الدالتين في المعادلتين 2.1 ، 2.2 حيث ان جميع الاعداد الحقيقية q, ولاي نقطة من النقاط الزمنية $n_1 < n_2 < \cdots < n_q$ وللحالات $k_1, \ldots, k_q$ وكما يلي :

$$P[X_{n_1} = k_1, \ldots, X_{n_q} = k_q] = p_{k_1}(n_1)p_{k_1,k_2}(n_1,n_2)p_{k_2,k_3}(n_2,n_3) \ldots p_{k_{q-1},k_q}(n_{q-1},n_q). \tag{2.3}$$

يقال ان متسلسلة ماركوف متجانسة (او متجانسة الزمن او لها احتمالات انتقالية ثابتة) اذا اعتمدت $p_{j,k}(m,n)$ على الفرق $n-m$ فقط اذن نطلق على $p_{j,k}(n) = P[X_{n+t} = k \mid X_t = j]$ لاي عدد صحيح $t \geq 0$ بدالة الاحتمال الانتقالي ذات الـ n مرحلة لمتسلسلة ماركوف المتجانسة $\{X_n\}$ بعبارة اخرى ، تمثل $p_{j,k}(n)$ الاحتمال المشروط لمتسلسلة ماركوف المتجانسة التي تكون في حالة j وبعد n مرحلة ستصبح في حالة k . تكتب الاحتمالات الانتقالية ذات المرحلة الواحدة $p_{j,k}(1)$ عادة $p_{j,k}$ نوضح ذلك بالرموز

$$p_{j,k} = P[X_{t+1} = k \mid X_t = j] \tag{2.5}$$

$$t \geq 0$$

وبنفس الطريقة نحدد قانون احتمال متسلسلة ماركوف المستمرة المعلم $\{X(t), t \geq 0\}$ وذلك بايجاد دالة كتلة الاحتمال في جميع الازمنة $t \geq s \geq 0$, والحالتين j ، k وكما يلي

$$p_k(t) = P[X(t) = k] \tag{2.6}$$

وان دالة كتلة الاحتمال المشروط كما يلي :

$$p_{j,k}(s,t) = P[X(t) = k \mid X(s) = j]. \tag{2.7}$$

يطلق على الدالة $p_{j,k}(s,t)$ بدالة الاحتمال الانتقالي لمتسلسلة ماركوف . يقال أن متسلسلة ماركوف $\{X(t), t \geq 0\}$ متجانسة (لها احتمالات انتقالية ثابتة) اذا اعتمدت $p_{j,k}(s,t)$ على الفرق $t-s$ فقط . الذلك نطلق على

$$p_{j,k}(t) = P[X(t+u) = k \mid X(u) = j] \tag{2.8}$$

لاية قيمة $u \geq 0$

بدالة الاحتمال الانتقالي لمتسلسلة ماركوف $\{X(t), t \geq 0\}$. العلاقة الاساسية التي

تحققها دالة الاحتمال الانتقالي لمتسلسلة ماركوف $\{X_n\}$ تسمى بمعادلة جابمان – كولموكروف : لكل زمن $n > u > m \geq 0$ ولكل حالتين j ، k

$$p_{j,k}(m,n) = \sum_{\text{حالات } i} p_{j,i}(m,u)\, p_{i,k}(u,n). \qquad (2.9)$$

لاحظ أن الجمع في المعادلة 2.9 يكون لجميع حالات متسلسلة ماركوف . لكي نبرهن المعادلة 2.9 نستخدم خاصية ماركوف والعلاقة الآتية :

$$P[X_n = k \mid X_m = j] = \sum_{\text{حالات } i} P[X_n = k \mid X_u = i, X_m = j]\, P[X_u = i \mid X_m = j]. \qquad (2.10)$$

بنفس الطريقة ، نثبت أن دالة الاحتمال الانتقالي لمتسلسلة ماركوف $\{X(t), t \geq 0\}$ تحقق معادلة جابمان – تولموكروف :

لكل زمن $t > u > s \geq 0$ ولكل حالتين j , k نحصل على

$$p_{j,k}(s,t) = \sum_{\text{حالات } i} p_{j,i}(s,u)\, p_{i,k}(u,t). \qquad (2.11)$$

مصفوفات الاحتمال الانتقالي :

نوضح الاحتمالات الانتقالية لمتسلسلة ماركوف $\{X_n\}$ بفضاء الحالة $\{0, 1, 2, \cdots\}$ وذلك بعرضها على شكل مصفوفة :

$$P(m,n) = \begin{bmatrix} p_{0,0}(m,n) & p_{0,1}(m,n) & p_{0,2}(m,n) & \ldots & p_{0,k}(m,n) & \ldots \\ p_{1,0}(m,n) & p_{1,1}(m,n) & p_{1,2}(m,n) & \ldots & p_{1,k}(m,n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ p_{j,0}(m,n) & p_{j,1}(m,n) & p_{j,2}(m,n) & \ldots & p_{j,k}(m,n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \end{bmatrix}. \qquad (2.12)$$

لاحظ أن عناصر مصفوفة الاحتمال الانتقالي $P(m,n)$ تحقق الشروط الآتية :

$$p_{j,k}(m,n) \geq 0 \qquad \text{لجميع قيم } j,k, \qquad (2.13)$$

$$\sum_k p_{j,k}(m,n) = 1 \qquad \text{لجميع قيم } j. \qquad (2.14)$$

اذا اعطيت مصفوفتين A , B ذات ابعاد $p \times q$ $q \times r$ على الترتيب

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pq} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \ldots & b_{qr} \end{bmatrix}$$

نعرف حاصل ضرب المصفوفتين A ، B كما يلي $C=AB$ حيث C ذو بعد $p \times r$ التي عنصرها c_{jk} يقع في تقاطع الصف j والعمود k ويكون كما يلي :

$$c_{jk} = a_{j1}\, b_{1k} + a_{j2}\, b_{2k} + \ldots + a_{jq}\, b_{qk} = \sum_{i=1}^{q} a_{ji}\, b_{ik}.$$

بنفس الطريقة ، اذا اعطيت مصفوفتين غير منتهيتين A ، B نعرف المصفوفة C بانها حاصل ضرب AB حيث يكون العنصر c_{jk}, يقع في تقاطع الصف j والعمود k كما مبين ادناه

$$c_{jk} = \sum_i a_{ji}\, b_{ik}.$$

نكتب معادلات جابمان كولموكروف بدلالة مصفوفة الاحتمال الانتقالية ولكل الأزمنة $0 \le m < u < n$ كما يلي :

$$P(m,n) = P(m,u)P(u,n). \tag{2.15}$$

وهكذا نرى اذا اعطينا متسلسلة ماركوف $\{X_n\}$ فاننا نستطيع تعريف عائلة من المصفوفات $\{P(m,n)\}$ تحقق المعادلات 2.13 , 2.14 , 2.15 . يمكن ان نثبت العكس ايضا : اذا اعطيت عائلة من المصفوفات $\{P(m,n)\}$ ثم تحقق المعادلات 2.13 , 2.14 , 2.15 فاننا نستطيع تعريف متسلسلة لماركوف $\{X_n\}$ حيث $P(m,n)$ عبارة عن مصفوفة الاحتمال الانتقالي ذات العناصر $p_{j,k}(m,n)$ التي تحقق المعادلة 2.2.

تحديد الاحتمالات الانتقالية لمتسلسلة ماركوف :

نشتق من معادلة جابمان كولموكروف علاقات تعاقبية مختلفة (في حالة المعلم المنقطع) ونشتق معادلات تفاضلية (في حالة المعلم المستمر) لدوال الاحتمال الانتقالية . نناقش في هذا البند حالة المعلم المتقطع . نناقش حالة المعلم المستمر في الفصل السابع .

نفرض ان $\{X_n\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف ذات مصفوفة الاحتمال الانتقالي $P(m,n)$ من المعادلة 2.15 نحصل على

$$\begin{aligned} P(m,n) &= P(m,n-1)P(n-1,n) \\ &= P(m,n-2)P(n-2,n-1)P(n-1,n) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= P(m,m+1)P(m+1,m+2)\cdots P(n-1,n). \end{aligned} \tag{2.16}$$

نحتاج لمعرفة $\{P(m,n)\}$ لجميع قيم $m \leq n$ ان نتعرف على سباق مصفوفات الاحتمال الانتقالي ذات الخطوة – الواحدة

$$P(0,1),\ P(1,2),\ \cdots,\ P(n,n+1),\ \cdots. \qquad (2.17)$$

نعرف بعد ذلك متجهات الاحتمال غير الشرطي (عندما $n = 0, 1, 2, \cdots$) ،

$$p(n) = \begin{bmatrix} p_0(n) \\ p_1(n) \\ \vdots \\ p_j(n) \\ \vdots \end{bmatrix},\ p_j(n) = P[X_n = j]. \qquad (2.18)$$

من السهولة تحقيق ان

$$p(n) = P(0,n)p(0). \qquad (2.19)$$

على ضوء المعادلات 2.3, 2.16, 2.19 نحصل على ان – قانون احتمال متسلسلة ماركوف $\{X_n\}$ بتحدد بصورة كاملة حالما عرفنا مصفوفات الاحتمال الانتقالية المعطاة في المعادلة 2.17 ومتجه الاحتمال غير الشرطي $p(0)$ في الزمن صفر .

نفرض في حالة متسلسلة ماركوف المتجانسة $\{X_n\}$ ان

$$P(n) = \{p_{j,k}(n)\},\ P = \{p_{j,k}\} \qquad (2.20)$$

تمثل مصفوفا الاحتمال الانتقالي ذات الـ n – خطوة ، خطوة – واحدة على ترتيب نحصل من المعادلتين 2.16 ، 2.19 على :

$$P(n) = P^n, \qquad (2.21)$$
$$p(n) = p(0)P^n. \qquad (2.22)$$

وعلى هذا الاساس يتم تحديد قانون احتمال متسلسلة ماركوف المتجانسة حالما عرفنا مصفوفة الاحتمال الانتقالي ذات الخطوة الواحدة $P = \{p_{j,k}\}$ ومتجه الاحتمال غير الشرطي $p(0) = \{p_j(0)\}$ في الزمن صفر .

يقال ان متسلسلة ماركوف $\{X_n\}$ عبارة عن متسلسلة محدودة ذات K من الحالات اذا كان عدد قيم المتغيرات العشوائية $\{X_n\}$ الممكنة محدودة وتساوي K . اذن ستكون الاحتمالات الانتقالية $p_{j,k}$ لاتساوي صفراً ، عندما يكون عدد قيم j, k محدودا فقط . وان مصفوفة الاحتمال الانتقالي P ستكون ذات ابعاد $K \times K$

باستخدام نظرية القيم الخاصة eigenvalues والمتجهات الخاصة eigenvectors للمصفوفات المحدودة نستطيع تحليليا للحصول على الاحتمالات الانتقالية ذات الـ

n خطوة لمتسلسلة ماركوف المحدودة . (راجع كتاب Feller سنة [1957] الفصل 16, لتوضيح هذه النظرية) .

يصعب علينا في حالة متسلسلات ماركوف ذات العدد المحدود من الحالات ان نحصل تحليليا على صيغة للاحتمالات الانتقالية ذات الـ n- خطوة وعلى هذا الاساس سنعتبر في بقية هذا الفصل مشكلة تحديد الطبيعة المقاربة بالتماثل (n تقتـــرب الى ∞) للاحتمالات الانتقالية ذات الـ n خطوة لمتسلسلات ماركوف المتجانسة .

مثال 2A

متسلسلات ماركوف ذوات المرحلتين :

متسلسلات ماركوف ذوات المرحلتين المتجانسة بسيطة ومع ذلك مهمة يكون شكل مصفوفة الاحتمال الانتقالي لمتسلسلة ماركوف المتجانسة ذات المرحلتين (بالحالتيـن صفراً ، 1) كما يلي :

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix}.$$

تعطى مصفوفة الاحتمال الانتقالية ذات المرحلتين كما يلي :

$$P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} p_{0,0}^2 + p_{0,1}p_{1,0} & p_{0,1}(p_{0,0} + p_{1,1}) \\ p_{1,0}(p_{0,0} + p_{1,1}) & p_{1,1}^2 + p_{0,1}p_{1,0} \end{bmatrix}.$$

عندما يكون $|p_{0,0} + p_{1,1} - 1| < 1$ فاننا نستطيع ان نثبت بالاستنتاج الرياضي ان مصفوفة الاحتمال الانتقالي ذات الـ n خطوة كما يلي :

$$P(n) = \frac{1}{2 - p_{0,0} - p_{1,1}} \begin{bmatrix} 1 - p_{1,1} & 1 - p_{0,0} \\ 1 - p_{1,1} & 1 - p_{0,0} \end{bmatrix} + \frac{(p_{0,0} + p_{1,1} - 1)^n}{2 - p_{0,0} - p_{1,1}} \begin{bmatrix} 1 - p_{0,0} & -(1 - p_{0,0}) \\ -(1 - p_{1,1}) & 1 - p_{1,1} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

نحصل من المعادلة 2.23 على تعبيرين مبسطين متماثلين بالتقارب للاحتمالات الانتقالية ذات الـ n- خطوة :

$$\lim_{n\to\infty} p_{0,0}(n) = \lim_{n\to\infty} p_{1,0}(n) = \frac{1 - p_{1,1}}{2 - p_{0,0} - p_{1,1}}, \quad (2.24)$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{0,1}(n) = \lim_{n\to\infty} p_{1,1}(n) = \frac{1 - p_{0,0}}{2 - p_{0,0} - p_{1,1}}.$$

ان نظام الاتصالات الذي يرسل الرقم صفراً اوالرقم 1 افضل مثال لمتسلسلة ماركوف المتجانسة ذات الحالتين – يمر كل رقم مرسل خلال عدة مراحل حيث في كل مرحلة يكون احتمال عدم تغير الرقم الداخل الى تلك المرحلة عند خروجه منها يساوي p
نفرض ان X_0 يمثل الرقم الداخل في المرحلة الاولى من النظام. وعندما $n \geq 1$ نفرض الـ X_n تمثل الرقم الخارج من المرحلة n في نظام الاتصالات . ان التتابع $X_0, X_1, X_2, \cdots$ عبارة عن متسلسلة ماركوف المتجانسة ذات مصفوفة احتمال انتقالي (افرض $q = 1 - p$)

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

يمكن كتابة مصفوفة الاحتمال الانتقالي ذات الـ n خطوة $P(n)$ المقابلة كما يلي :

$$P(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

مثال لتوضيح استخدام المعادلة 2.26, اذا علمنا ان $p = 2/3,$ كما يلي :

$$\begin{aligned} P[X_2 = 1 \mid X_0 = 1] &= p_{11}^{(2)} = \tfrac{5}{9}, \\ P[X_3 = 1 \mid X_0 = 1] &= p_{11}^{(3)} = \tfrac{14}{27}; \end{aligned} \tag{2.27}$$

بعبارة اخرى . اذا كان الرقم الداخل النظام 1 فان احتمال خروجه بصورة صحيحة من النظام بعد مرحلتين يساوي 5/9 وان أحتمال خروجه بصورة صحيحة تبعد ثلاث مراحل يساوي 14/27

نرغب ايضا في حساب احتمال الرقم الخارج من النظام ان كان الرقم الداخل الى النظام 1 نترك للقارىء مبرهنة ان

$$P[X_0 = 1 \mid X_n = 1] = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (\alpha - \beta)(p-q)^n}, \tag{2.28}$$

وفقا الى مصفوفة الاحتمال الانتقالي 2.25 حيث $\alpha = P[X_0 = 1]$. $\beta = 1 - \alpha$

مثال 2B

الاحتمالات الانتقالية لمتسلسلة ماركوف في حالة صف الانتظار المنفرد :

نفرض ان $\{X_n\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف المعرفة في المثال 1B . نحصل على الاحتمالات الانتقالية ذات الخطوة الواحدة بسهولة عندما $j = 0$

$$p_{0,k}(n,n+1) = P[U_{n+1} = k] = a_k \qquad (2.29)$$

بينما عندما $j > 0$

$$p_{j,k}(n,n+1) = P[U_{n+1} = k - j + 1] = a_{k-j+1} \qquad (2.30)$$

حيث a_k عبارة عن احتمال وصول k زبون خلال زمن خدمة زبون (راجع التمرين 2.20) .

ان الاحتمالات الانتقالية ذات الخطوة الواحدة مستقلة عن n اذن تكون متسلسلة ماركوف $\{X_n\}$ متجانسة ذات مصفوفة الاحتمال الانتقالي المبينة ادناه

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & & \cdots \end{bmatrix} . \qquad (2.31)$$

يبدو الحصول على صيغة لـ P^n بصورة واضحة فيه نوع من الصعوبة .

ملاحظة حول المصطلحات المستخدمة لوصف صفوف الانتظار :

يستخدم كثير من الكتاب مصطلحات مقدمة من قبل كاندل (1953) . لوصف انواع صفوف الانتظار . نفترض ان ازمنة الوصول بين زبون واخر $T_1, T_2, \cdots$ متغيرات عشوائية مستقلة موزعة بصورة متماثلة . بنفس الطريقة نفترض ان ازمنة الخدمة $S_1, S_2, \cdots$ متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع .

نكتب بعد ذلك الرمز الاتي $F_T/F_S/Q,$ حيث F_T تمثل دالة توزيع زمن الفجوة بين وصولين F_S تمثل دالة توزيع زمن الخدمة وان Q عبارة عن عدد القنوات الخدمية .

الرموز الاتية تمثل توزيعات زمن الوصول وزمن الخدمة :

D زمن الخدمة او الوصول المحدود او الثابت

M التوزيع الاسي لزمن الخدمة او الوصول .

E_k توزيع (ارلانك Erlang (اوكاما) لزمن الخدمة او الوصول (توزيع ارلانك من الدرجة k له دالة كثافة احتمال

$$f(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(k)} (\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t}, \qquad t > 0$$
$$= 0 \qquad , \qquad t < 0);$$

G توزيع ازمنة الخدمة العام

GI توزيع زمن الوصول العام

ان المصطلح $M/G/1$ يمثل صف انتظار ذا قناة خدمية واحدة والفجوة الزمنية بين وصولين متعاقبين موزعة توزيعا اسيا لايوجد افتراض خاص حول زمن الخدمة يمثل المصطلح $GI/M/1$ هدف انتظار فيه قناة خدمية واحدة وان ازمنة الخدمة موزعة اسيا ولايوجد افتراض حول ازمنة الوصول يطلق على متسلسلة ماركوف المعرفة في المثال 1B imbedded Markov لنظام الانتظار $M/G/1$. سنعتبر في التمرين 2.21 متسلسلة ماركوف لنظام الانتظار $GI/M/1$

مثال 2C

عمليات التفرع المتقطعة .

تأمل وجود مجتمع يتكون من افراد بامكانهم انتاج افراد جدد من نفس النوع ويطلق على الافراد الاصليين بالجيل رقم صفر يرمز لعدد الافراد الاصليون بالرمز X_0 وهو يمثل حجم الجيل رقم صفر جميع الافراد الجدد الناتجين من الجيل رقم صفر يكونون مايسمى بالجيل الاول ونرمز لعدد افراد ذلك الجيل بالرمز X_1 نفرض بصورة عامة ان X_n تمثل حجم الجيل النوني (جميع الافراد الناتجة من الجيل $(n-1)$)

نفترض ان عدد الافراد الناتجين من الافراد المختلفين عبارة عن متغيرات عشوائية

مستقلة متماثلة التوزيع كالمتغير العشوائي Z بدالة كتلة احتمال $\{p_j\}$ عندما $j = 0, 1, \cdots$

$$p_j = P[Z = j] = P \tag{2.32}$$

يفترض في أي احتمال من الاحتمالات $p_0, p_1, \cdots$ (لا يساوي واحد) وان $p_0 > 0$ $p_0 + p_1 < 1$ وان

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{2.33}$$

حيث Z_i عبارة عن عدد الافرادالجدد للفرد في الجيل النوني . نتيجة لذلك فان التوزيع الشرطي لـ X_{n+1} اذا علمت X_n هو نفس توزيع مجموع X_n من المتغيرات العشوائية المستقلة كل منها بتماثل التوزيع كالمتغير Z . بدلالة الدوال المولدة للاحتمال نكتب الصيغة السابقة كما يلي :

عندما $j > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k}\, z^k = \left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i\, z^i\right)^j. \tag{2.34}$$

اذن دالة الاحتمال الانتقالي ذات الخطوة الواحدة $p_{j,k}$ تساوي معامل z^k في مفكوك جهة المعادلة 2.34 اليمنى لقوى z .

يهمنا الان بصورة خاصة ايجاد حجم الجيل النوني X_n اذا علمنا ان $X_0 = 1$ (حجم الجيل رقم صفر يساوي 1) .نكتب احتمال توزيع X_n غير المشروط كمايلي :

$$p_j(1) = P[X_1 = j] = p_j \tag{2.35}$$

عندما $n = 1$, بينماعندما $n > 1$ فان

$$p_j(n) = P[X_n = j] = p_{1,j}(n). \tag{2.36}$$

نفرض ان

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(n)\, z^j \tag{2.37}$$

عبارة عن الدالة المولدة لاحتمال حجم الجيل النوني .نحصل على علاقة تعاقبية *recursive relation* $P_n(z)$ كما يلي

$$P_{n+1}(z) = P(P_n(z)) = P_n(P(z)), \tag{2.38}$$

حيث نعرف

$$P(z) = P_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j\, z^j. \tag{2.39}$$

لكي نبرهن المعادلة 2.38 نحصل من المعادلة 2.33 على :

$$P_{n+1}(z) = E[z^{X_{n+1}}] = \sum_{j=1}^{\infty} E[z^{X_{n+1}} \mid X_n = j] P[X_n = j]$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \{P(z)\}^j P[X_n = j] = P_n(P(z)).$$

باستخدام الحقيقة الاتية $P_{n+1}(z) = P_n(P(z))$ نبرهن بالاستنتاج الرياضي
ان $P_{n+1}(z) = P(P_n(z))$

من المعادلة 2.38 نستطيع صياغة صيغة الاحتمال الانتقالي ذي الـ n خطوة :
(2.40) ، معامل z^k في الصيغة $p_{j,k}(n) = [P_n(z)]^j$

احتمال انقراض المجتمع الموصوف بعملية التفرع :

ان المشكلة المهمة التي ظهرت بخصوص انقراض الالقاب العائلية هي مشكلة ايجاد غاية احتمال الانقراض ، إي اوجد

$$\pi_0 = \lim_{n \to \infty} p_0(n), \tag{2.41}$$

غاية الاحتمال $p_0(n)$ لعدم وجود افراد من الجيل النوني .وجود الغاية يكون واضحاً لان $p_0(n)$ تتابع غير تنازلي محدود

$$0 \le p_0(n) \le p_0(n+1) \le 1. \tag{2.42}$$

هذه المشكلة لم تحل بصورة كاملة حتى 1930 (راجع [1889] Galton) بالرغم من ظهورها في نهاية القرن الماضي (راجع Sterrensen ([1930]) .

نظرية : 2A

النظرية الاساسية لعمليات التفرع :

ان الاحتمال π_0 للانقراض الحتمي (اذا علمت ان حجم المجتمع رقم صفر يساوي 1) عبارة عن اصغر عدد موجب p يحقق العلاقة الاتية :

$$p = P(p), \tag{2.43}$$

حيث $P(z)$ عبارة عن الدالة المولدة لاحتمال عدد الافراد الناتجين من كل فرد .

اضافة الى ذلك فان احتمال الانقراض الحتمي يساوي 1 اذا كان متوسط عـــدد الافراد μ الناتجين من كل فرد ليس اكبر من 1 والعكس صحيح .

(2.44) يكتب ذلك بالرموز $\pi_0 = 1$ والعكس صحيح $\mu \leq 1$

ملاحظة :

نوضح استخدام النظرية باعطاء المثال الاتي من كتاب Lotka (1931) الذي وجد ان الدالة المولدة للاحتمال لعدد الاولاد الذكور للرجل الابيض في الولايات المتحدة الامريكية تساوي تقريبا .

$$P(z) = \frac{0.482 - 0.041z}{1 - 0.559z}. \tag{2.45}$$

وهكذا سنحصل على معادلة من الدرجة الثانيةباستخدام المعادلة $P(p) = p$

$$0 = p(1 - 0.559p) - (0.482 - 0.041p). \tag{2.46}$$

للمعادلة 2.46 جذران هما $p = 1$

$$p = \frac{0.482}{0.559} = 0.86. \tag{2.47}$$

وهكذا فان احتمال انقراض الالقاب العائلية (الذرية العائدة الى رجل واحد) يساوي 0.86

البرهان :

بما ان $p_0(n) = P_n(0)$ فان من المعادلة 2.36 نثبت ان $p_n(0)$ تحقق العلاقة التعاقبية .

$$p_0(n+1) = P(p_0(n)). \tag{2.48}$$

من المعادلة 2.48 يتضح ان π_0 تحقق

$$\pi_0 = P(\pi_0). \tag{2.49}$$

عندما $n \to \infty$. لكي نبرهن ان π_0 اصغرعدد موجب يحقق المعادلة 2.43, نثبت اولا ان

$$\pi_0 \leq p \tag{2.50}$$

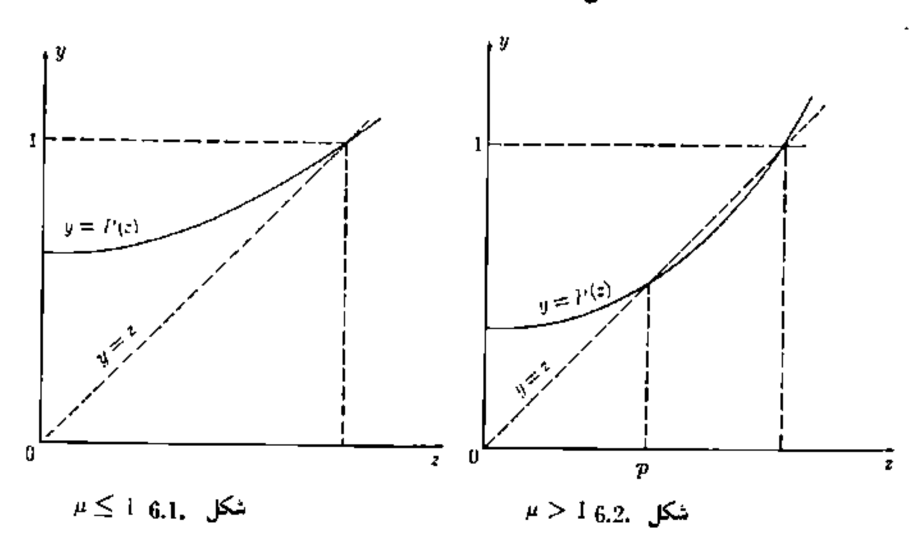
لكل عدد موجب p يحقق المعادلة 2.43. بما ان $0 \leq a < b$ فهذا يعني $P(a) \leq P(b)$

من هذا يتبين لنا ان $p_0(1) = P(0) \leq P(p) = p$

باستخدام الاستنتاج الرياضي ولكل n, نجد ان $p_0(n) \leq p$

حيث نحصل منها على المعادلة 2.50 عندما تقترب n الى ∞ .

لكي نبرهن المعادلة 2.44, نلاحظ ان (i) $\mu = P'(1)$, مشتقة الدالة المولدة عند النقطة 1 (ii), $P(1) = 1$, بحيث يكون 1 عبارة عن حل للمعادلة 2.43, . (iii) $P(0) = p_0(1) > 0$. من الواضح هندسيا (ويمكن برهنتها تحليليا باستخدام حقيقة كون $P(z)$ عبارة عن دالة مقعرة) تحقيق صحة احد الشكلين 6.1 او 6.2 . اما ان يوجد عدد p في الفاصلة $0<p<1$ يحقق المعادلة 2.43 اولايوجد . لايوجد مثل هذا العدد p اذا كان الميل μ, لماس الدالة المولدة عند النقطة $z = 1$ اقل اويساوي 1 والعكس صحيح من جانب اخر $\pi_0 = 1$ اذا لم يوجد جذر p للمعادلة $p = P(p)$ في الفاصلة $0< p<1$ والعكس صحيح . وهو المطلوب اثباته هندسيا للمعادلة 2.44 . تجد الصيغة التحليلية لهذا البرهان في كتاب Feller (1957) ص 275 — Reid Bharucha سنة (1960) ص 24 الى 26 .



شكل 6.1. $\mu \leq 1$

شكل 6.2. $\mu > 1$

المكملات :

2A تحقق العملية اللاماركوفية معادلة جابمان كولموكروف :

ندرس الخصائص العامة لمتسلسلات ماركوف (التي درست بصورة موسعة) من خلال دراسة خصائص حلول معادلات جابمان كولموكروف . يجب ان ندرك وجود عمليات تصادفية لاماركوفية احتمالاتها الانتقالية في المعادلة 2.2 وتحقق ايضا معادلات جابمان كولموكروف . المثال المبسط حول هذه العمليات مبين ادناه . للحصول على امثلة

اضافية راجع Feller [1959] . ليس صحيحا القول بان العملية التصادفية عبارة عن عملية ماركوف اذا حققت احتمالاتها الانتقالية معادلات جابمان كولموكروف بينما تحقق المعادلات الانتقالية لمتسلسلة ماركوف معادلات جابمان كولموكروف .

دعنا نعرف تتابع $\{X_n\}$ من المتغيرات العشوائية كما يلي تأمل وجود اربعة اوعية مرقمة 1 الى 4 . كل منها يحتوي على اربع كرات نفرض سحب كرة واحدة من كل وعاء بالتسلسل . عندما $m = 1, 2, \cdots$ نفرض ان $A_m^{(1)}$ عبارة عن حادثة كون الكرة المسحوبة من الوعاء m هي الكرة المرقمة 1 او 4 ، نفرض ان $A_m^{(2)}$. عبارة عن حادثة كون الكرة المسحوبة من الوعاء m هي الكرة المرقمة 2 او 4 ونفرض ان $A_m^{(3)}$ عبارة عن حادثة كون الكرة المسحوبة من الوعاء m هي الكرة المرقمة 3 او 4 .نفرض عندما $m = 1, 2, \cdots$ وان $j = 1, 2, 3$, $X_{3(m-1)+j} = 1$ يساوي صفر اوواحد حسب حدوث $A_m^{(j)}$ أوعدم حدوثها

اثبت في حالة تساوي k, k_1, k_2 الى صفر او 1 ان

$$P[X_n = k] = P[X_n = k_2 \mid X_m = k_1] = \tfrac{1}{2} \qquad \text{for } n > m,$$

بينما

$$P[X_{3m+3} = 1 \mid X_{3m+2} = 1, X_{3m+1} = 1] = 1 \qquad \text{for } m = 0, 1, \cdots.$$

وعلى هذا الاساس ، اثبت ان العملية $\{X_n\}$ تحقق معادلات جابمان كولموكروف لكنها لاتحقق متسلسلة ماركوف .

التمارين :

صف حالة الفضاء ومصفوفات الاحتمال الانتقالي ذات الخطوة الواحدة والخطوتين لمتسلسلة ماركوف المتجانسة $\{X_n\}$ والموصوفة في التمارين 2.1 الى 2.10

2.1 مجموعة اربعة اطفال يلعبون لعبة تتكون من رمي الكرة من واحد لاخر يكون احتمال رمي الكرة من احدهم الى الثلاثة الباقين متساوون .نفرض ان X_0 تمثل الطفل الذي يحصل على الكرة بعد X_n رمية فقط حيث $n \geq 1$

2.2 يتم اختيار رقم بصورة عشوائية من الاعداد الصحيحة 1 الى 6 عندما $n > 1$ نختار X_n بصورة عشوائية من الاعداد الصحيحة $1, 2, \cdots, X_{n-1}$.

2.3 تأمل رميات مستقلة لزهر النرد .نفرض ان X_n اكبر عدد يظهر في الرميات n الاولى .

2.4 تأمل رميات مستقلة لقطعة نقود احتمال ظهور صورتها يساوي p افرض ان X_n عبارة عن مجموع عدد الصور خلال الرميات n الاولى .

2.5 وضعت كرتان سوداوان وكرتان بيضاوان في وعائين بحيث يكون في كل وعاء كرتان .يتم اختيار كرة واحدة بصورة عشوائية من كل وعاء .ثم يتم تبديل موقع الكرتين اللتين تم اختيار هما .

نفرض ان X_0 تمثل عدد الكرات البيض الموجودة في الوعاء الاول في بداية الامر . عندما $n \geq 1$
نفرض ان X_n تمثل عدد الكرات البيض في الوعاء الاول بعد حدوث n تبديـــــل .

2.6 تتحرك جزيئة حركة عشوائية حول دائرة فيها اربع نقاط باتجاه عقرب الساعة (ويرمز لهذه النقاط بالرمز $0, 1, 2, 3$) .احتمال تحرك الجزيئة الى النقطة الـواقعـة الى يمينها يساوي p واحتمال تحركها الى النقطة الواقعة شمالها (الحركة بعكس اتجاه عقرب الساعة)يساوي $1-p$.

نفرض ان X_0 تمثل الموقع الابتدائي للجزيئة .افرض عندما $n \geq 1$ ان X_n تمثل موقع الجزيئة بعد n خطوة .

2.7 وضعت فأرة بيضاء في شبكة من الممرات المعقدة المبينة ادناه .

1	2	3
6	5	4
7	8	9

تكون حركة الفأرة خلال المربعات الاربعة بصورة عشوائية .بمعنى اذا علمت وجود k مخرج لخروج الفأرة فان الفأرة تختار كل مخرج باحتمال $\frac{1}{k}$.

يغير الفأر موقعه في كل لحظة زمنية . حالة النظام عبارة عن عدد المربعات التي يشغلها الفأر .

2.8 ماكنتان في مصنع تستخدم احداهما فقط في اي وقت معلوم .عطب ماكنة في اي

يوم كان باحتمال p .يوجد مصلح واحد لتصليح الماكنة ويستغرق يومين لتصليحهما ولا يستطيع العمل مع ماكنتين في ان – واحد .يتم عطب الماكنة في نهاية اليوم بحيث يبدأ التصليح في اليوم الثاني والماكنة الثانية (ان كانت صالحة) تستعمل في اليوم الثاني)

حالة النظام عبارة عن الزوج (x,y) حيث x عدد المكائن الصالحة للعمل في نهاية اليوم وان y تساوي واحداً اذا توقفت الماكنة عن العمل وتساوي صفراً فيما عدا ذلك

تلميح . فضاء الحالة عبارة $\{(2,0), (1,0), (1,1), (0,1)\}$ تأمل الرميات المتتابعة المعادة المستقلة لقطعة نقود تظهر صورتها باحتمال p .

نفرض عندما $n \geq 2$ ان X_n تساوي $0, 1, 2, 3$ حسب نتيجة المحاولتين $(n-1)$ (صورة . صورة) . (صورة . كتابة) . (كتابة . صورة) او (كتابة . كتابة) على الترتيب .

2.9 انجز تتابعاً من المحاولات . حيث في كل محاولة ترمي قطعتي نقود متماثلتي الحدوث . نفرض ان X_n تساوي عدد مرات الحصول على صورة عندما تعاد المحاولة n مرة .

2.11 المتسلسلة اللاماركوفية

تأمل سلسلة من الرميات المعادة لقطعة نقود تظهر صورتها باحتمال p . نفرض عندما $n \geq 2$ ان X_n تساوي صفراً . واحداً حسب نتيجة المحاولتين n ، $(n-1)$ فيما اذا كانتا صورة ام لا . اثبت ان $\{X_n\}$ ليست متسلسلة ماركوف . (نلاحظ ان هذه العملية التصادفية يحصل عليها من متسلسلة ماركوف في التمرين 2.9 وذلك بجمع ثلاث حالات معا) . هل تحقق $\{X_n\}$ معادلةتجابمانكولموكروف ؟

2.12 اوجد في التمرين .2.1 احتمال وصول الكرة بعد ثلاث رميات الى الطفل (i) الذي كانت عنده الكرة في بادىء الامر (ii) الذي حصل عليها بعد الرمية الاولى .

2.13 اوجد في التمرين .2.2 (i) احتمال $X_3 = 3$ (ii) الاحتمال الشرطي $X_2 = 4$ اذا علمت ان $X_3 = 3$

2.14 اوجد في التمرين 2.5، قيمة X_n المحتملة جدا عندما . $n \geq 2.$

2.15 اوجد حلا للغز الأتي باستخدام خصائص متسلسلة ماركوف : اربعة اشخاص هم A, B, C, D يقولون الحقيقة مرة واحدة لكل ثلاث مرات (وبصورة مستقلة) . يؤكد لنا A ان B يفكر ان يقول C بان D كذاب . ماهو احتمال ان D يقول الحقيقة ؟ (راجع كتاب الاحتمالات الحديثة ص 133 للحصول على مناقشة لهذا اللغز والمراجع الخاصة بتطوره) .

2.16 نفترض ان حالة الجو في يوم ماهو نفس حالة الجو في اليوم السابق (سواء كان الجو ممطرا ام غير ممطر) باحتمال يساوي p . نفرض ان p_1 عبارة عن احتمال كون الجو ممطراً في اليوم الاول من السنة . اوجد احتمال p_n لكون الجو ممطرا في اليوم n
اوجد قيمة غاية p_n عندما تقترب n الى المالانهاية .

2.17 نفترض وجود قطعتي نقود هما B , A يجب ان نرمي قطعة نقود n مرة باستخدام قطعة النقود المفضلة. . نحصل على $1 عندما تظهر صورة قطعة النقود C تظهر صورة قطعة النقود A باحتمال 1/2 وتظهر صورة قطعة النقود B باحتمال 1/4

لكننا لم نكن نعلم ايهما قطعة نقود A أو B قررنا رمي قطعتي النقود حسب النظام الاتي نختار في الرمية الاولى قطعة النقود بصورة عشوائية . نستخدم في بقية الرميات اللاحقة قطعة النقود المستعملة في الرمية السابقة اذا ظهرت الصورة في تلك الرمية ، من جانب اخر سنستخدم قطعة النقود الاخرى . ماهو احتمال رمي قطعة النقود A في الرمية n اذا كانت (i) $n = 4$ n كمية كبيرة ؟

(ii) ماهو احتمال ظهور صورة قطعة النقود في الرمية n اذا كانت (أ) $n = 4$ (ب) n كمية كبيرة ؟ (تلميح . نفرض ان X_n تساوي n أو صفراً حسب نوع قطعة النقود المستخدمة في المحاولة n فيما اذا كانت A أو B)

2.18 برهن صحة المعادلة 2.23

2.19 برهن صحة المعادلة 2.28

2.20 تكملة المثالين 1B 2B . اثبت ان احتمال وصول k زبون خلال زمن خدمة زبون مايساوي a_k

$$a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF_S(t), \qquad (2.51)$$

حيث $F_S(\cdot)$ دالة توزيع ازمنة الخدمة . اوجد متوسط وتباين توزيع الاحتمال $\{a_k\}$

2.21 متسلسلة ماركوف لصف الانتظار $GI/M/1$. صف انتظار ذو قناة خدمية مفردة وازمنة الفجوات المتتابعة بين وصول زبون واخر عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع وان ازمنة خدمة الزبائن المتعاقبين عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة متماثلة التوزيع بمتوسط $1/\mu$ نرمز لنظام الانتظارهذا بالرمز $GI/M/1$ (راجع المثال 2B) نفرض عندما $n \geq 1$ ان X_n تمثل عدد الاشخاص في صف الانتظار عند لحظة وصول الزبون n . نفرض ان U_n تمثل عدد الزبائن المقدمة لهم الخدمة خلال الفترة الزمنية المحصورة بين وصول الزبون n والزبون $(n+1)$.

ان $X_1 = 0$ وعندما $n \geq 1$ $X_{n+1} = X_n + 1 - U_n$ اثبت ان $\{X_n\}$ متسلسلة ماركوف المتجانسة ذات فضاء الحالة $\{0, 1, \cdots\}$ ثم اثبت ان مصفوفة احتمالها الانتقالي كما يلي

$$P = \begin{bmatrix} B_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ B_1 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ B_2 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots \end{bmatrix}, \qquad (2.52)$$

حيث

$$b_k = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} dF_T(t), \quad B_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j, \qquad (2.53)$$

وان $F_T(t)$ عبارة عن دالة توزيع الفجوة الزمنية بين وصول زبونين متتابعين

2.22 برهن صيغة نظرية عمليات التفرع الاساسية الاتية تحليليا . نفرض ان

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n$$

عبارة عن الدالة المولدة للتوزيع الاحتمالي $\{p_n\}$ حيث $p_0 > 0$ ان للمعادلة $p = P(p)$ جذر p في الفاصلة $p_0 \leq p < 1$ اذا كانت $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n > 1$ والعكس صحيح

2.23 اثبت ان احتمال الانقراض النهائي π_0 لعملية التفرع يساوي p^k حيث p عبارة عن اصغرعدد موجب يحقق المعادلة 2.43 اذا علمت ان حجم المجتمع رقم صفر يساوي $k \geq 1$

2.24 نفترض ان الاحتمالات $p_1, p_2, \cdots$ المعرفة في المعادلة 2.32 عبارة عن متوالية هندسية : $p_j = b\, r^{j-1}, \quad j = 1, 2, \cdots,$

حيث $0 < r < 1$ and $0 < b < 1 - r,$ بينما

$$p_0 = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1 - \frac{b}{1-r} = \frac{1-(r+b)}{1-r}.$$

(i) اوجدالدالة المقابلة المولدة للاحتمال $P(z)$ والمتوسط μ .

(ii) اثبت ان للمعادلة $p = P(p)$ جذرين موجبين فقط هما 1

$$p = \frac{1-(r+b)}{r(1-r)}.$$

(iii) اثبت ان $p > 1$ اذا كانت $\mu \leq 1$ والعكس صحيح .

2.25 تقدير مصفوفة الاحتمال الانتقالي .شاهدنا 50 انتقاله لمتسلسلة ماركوف ذات الحالتين .الحالات المتتابعة التي اشغلتها المتسلسلة كانت كما يلي :

0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1
0 1 0 1 0 1 1 1 1 0
1 0 0 1 0 1 1 0 0 1
0 1 1 0 1 0 0 0 1 0
1 1 0 0 1 1 0 1 1 0

استخرج تقديريا مصفوفة الاحتمال الانتقالي ذات الخطوة الواحدة بافتراض ان المتسلسلة متجانسة .

6-3 تحليل متسلسلات ماركوف الى فئات تبادلية :

تقتصر دراستنا فيما تبقى من هذا الفصل على التطور الزمني لمتسلسلة ماركوف المتجانسة $\{X_n\}$ ذات المعالم المتقطعة .من المناسب ان نبدأ بتبويب، حالات المتسلسلة حسب امكانية الوصول من حالة معلومة الى حالة اخرى معلومة .

يقال ان الحالة k يمكن الوصول اليها من الحالة j اذا كانت $p_{j,k}(N) > 0$. عندما يكون العدد صحيحاً $N \geq 1$.يقال ان الحالتين j و k متبادلتان *communicate* اذا امكن الوصول الى j من k وامكن الوصول الى k من j .اذا امكن الوصول الى k من j فاننا نرمز لذلك بالرمز $j \to k$ اذا تبادلت k و j فنرمز لذلك بالرمز $j \leftrightarrow k$

نظـــرية 3A

اذا كانت $i \to j$, $j \to k$ فان $i \to k$.

البـــرهـــان :

اختر M ، N بحيث $p_{i,j}(M) > 0$ ، $p_{j,k}(N) > 0$ باستخدام معادلة جابمان كولموكروف نحصل على :

$$p_{i,k}(M+N) = \sum_{\text{جميع حالات } h} p_{i,h}(M)\, p_{h,k}(N) \geq p_{i,j}(M)\, p_{j,k}(N) > 0.$$

وهو المطلوب اثباته .

باستخدام النظرية 3A نحصل على النتيجة الاتية :

نظـــريـــة : 3B

يكون التبادل متناظراً وانتقالياً بمعنى انه لكل من الحالات k , i, j

(3.1) $k \leftrightarrow j$ تعني $j \leftrightarrow k$

(3.2) $i \leftrightarrow k$ $i \leftrightarrow j$ تعني $j \leftrightarrow k$

تعرف الفئة التبادلية $C(j)$ اذا اعطيت حالة j لمتسلسلة ماركوف ، بانها مجموعة جميع حالات k العائدة للمتسلسلة والتي تتبادل مع j نعبر عن ذلك بالرمـز كما يلي :

(3.3) $k \leftrightarrow j$ اذا كانت $k \in C(j)$ والعكس صحيح .

في بعض الاحيان نجد ان $C(j)$ خالية (يعني j تتبادل مع لاشيء ، حتى ولو مع نفسها) .في هذة الحاله نطلق على j بانها حالة غير عائدة *non-return*

اذا كانت $C(j)$ غير خالية ، فان j تنتمي الى $C(j)$ لكي نـرى ذلـك ، لاحظ انه باستخدام النظرية 3B سنجد حالة k بحيث $j \leftrightarrow k$ ، $k \leftrightarrow j$ اذا كانت $j \leftrightarrow j$ والعكس صحيح .الحالة المتبادلة مع نفسها تسمى بالحالة العائدة *return*

يقال ان الفئة غير الخالية C من الحالات المنتمية الى متسلسلة ماركوف بانها فئة تبادلية اذا كانت C تساوي $C(j)$ لحالة ما j .

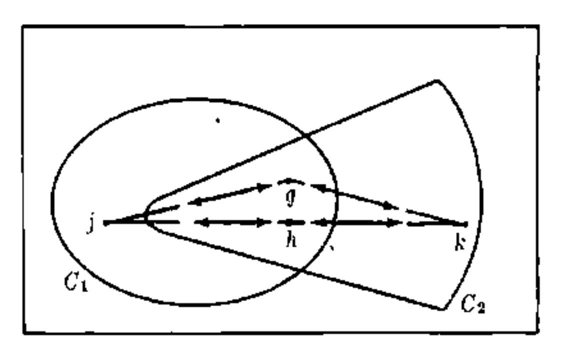
نظـــريــــة 3C

اذا كانت C_1 ، C_2 فئتين تبادليتين فان $C_1 = C_2$ او $C_1 C_2 = \emptyset$ (اي ان C_1 ، C_2 غير مشتركتين) .

البـــرهــــان :

نفترض وجود h حالة مشتركة بين C_1 C_2. نفرض ان j k عبارة عن حالات بحيث $C_1 = C(j)$ $C_2 = C(k)$. لكي نبرهن ان $C_1 = C_2$ نحتاج ان نبرهن ان $C(j) \subset C(k)$ وبنفس الطريقة نحصل على $C(k) \subset C(j)$
نفرض ان $g \in C(j)$

بما ان $g \leftrightarrow j$ ، $h \leftrightarrow j$ نحصل على $g \leftrightarrow h$. لكن $h \leftrightarrow k$. اذن $g \leftrightarrow k$ وان g تنتمي الى $C(k)$ والتي يجب ان تبرهن .من الممكن رسم مخطط يبرهــن النظرية 3C بمجرد النظر اليه (راجع الشكل (6.3)) .



الشكل 6.3 البرهان التخطيطي للنظرية 3C

نظـــريــــة 3D

تحليل متسلسلة ماركوف الى فئات غير مشتركة :

يمكن كتابة المجموعة S لحالات متسلسلة ماركوف على شكل اتحاد عائلـــة منتهية او لامنتهية محدودة $\{C_r\}$ من مجاميع الحالات غير المشتركة .

$$S = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r \cup \ldots \quad \text{and} \quad C_i C_j = \emptyset \quad \text{for} \quad i \neq j,$$

حيث كل مجموعة C_r تكون اما فئة من الحالات التبادلية اوتحتوي على حالة واحدة غير عائدة فقط .

البرهان

اختر حالة j_1 وافرض ان C_1 يساوي $C(j_1)$ او $\{j_1\}$ حسب كون j_1 حالة عائدة او غيرعائدة . اختربعد ذلك حالة j_2 لاتنتمي الى C_1 وافرض ان C_2 تساوي $C(j_2)$ او $\{j_2\}$ حسب كون j_2 حالة عائدة اوغيرعائدة . من النظرية 3C نحصل على ان C_1 C_2 غير مشتركتين . نستمر بهذه الصيغة. ونحصل على التحليل الموصوف سابقا .

يقال ان المجموعة غير الخالية C من الحالات مغلقة *closed* عند عدم وجود حالة خارج المجموعة يمكن الوصول اليها في اية حالة داخل المجموعة . نعبر عن ذلك بالرموز وكما يلي :

تكون C مغلقة اذا كانت كل j تنتمي الى C وكل k لاتنتمي الى C ، $p_{j,k}(n) = 0$ $n = 1, 2, \cdots$ لاحظ انه حالما تدخل متسلسلة ماركوف فئة مغلقة فانها ستبقى في تلك الفئة

مثال : 3A

نعتبر متسلسلات ماركوف الأربع . كلاً منها بفضاء حالة $S = \{1,2,3,4\}$ ومصفوفات احتمال انتقالي على الترتيب

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

نعتبر تحليل فضاء الحالة S الى مجاميع غير مشتركة لها الخصائص المذكورة في النظرية 3D

تنقسم S وفقا الى P_1 الى فئة تبادلية مغلقة واحدة $\{1\}$ وفئتين تبادليتين غير مغلقتين $\{2\}, \{3,4\}$

تنقسم S وفقا الى P_2 الى فئة تبادلية واحدة $\{1\}$ وثلاثة مجاميع غيرعائدة $\{2\}$ ، $\{3\}, \{4\}$.

تنقسم S وفقا الى P_3, الى فئة تبادلية مغلقة واحدة $\{1,2,3\}$ ومجموعة غير عائدة $\{4\}$.

تنقسم S وفقا الى P_4, الى فئة تبادلية مفردة .

تكون الفئة التبادلية المغلقة C لحالاتمتسلسلة ماركوف التي يمكن دراستها بصورة مستقلة . اذا كتبنا مصفوفة الاحتمال الانتقالي P لمتسلسلة ماركوف بحيث تكتب اولا الحالات المنتمية الى C فان P تكتب كما يلي :

$$P = \begin{bmatrix} P_C & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

حيث * تمثل مدخل مصفوفة من الممكن ان لايساوي صفراً وان P_C مصفوفة جزيئة لـ P تكون لمداخلها دلائل من الحالات الموجودة في C نستطيع كتابة مصفوفة الاحتمال الانتقالي ذات الـ n خطوة كما يلي :

$$P(n) = \begin{bmatrix} (P_C)^n & 0 \\ * & * \end{bmatrix}$$

بما انه يمكن فصل الفئة التبادلية المغلقة C من متسلسلة ماركوف (وذلك بحذف جميع صفوف واعمدة مصفوفة الاحتمال الانتقالي المقابل للحالات الموجودة خارج الفئة المغلقة C) ومعالجتها كمتسلسلة لماركوف فان لدراسة الخواص (المقارنة بالتماثل) لمتسلسلة ماركوف نحتاج ان ندرس الخواص (المقاربة بالتماثل) لمتسلسلة ماركوف حيث توجد فئة تبادلية مغلقة واحدة فقط وان جميع الفئات التبادلية الاخرى عبارة عن فئات غير مغلقة .

المكملات :

3A معيار لامكانية الوصول :

اثبت ان الوصول الى k يكون من j اذا كان للعدد الصحيح N وللحالات $i_1, i_2, \cdots i_{N-1}$ والعكس صحيح $p_{j,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{N-2},i_{N-1}} p_{i_{N-1},k} > 0$

3B معيار للحالة غير العائدة :

اثبت ان j حالة غير عائدة اذا كان $p_{j,j}(n) = 0$ والعكس صحيح لكل عدد صحيح n .

3C معيار حالة الابادة :

يطلق على حالة j عندما يكون $p_{j,j}=1$ بحالة الابادة .
اثبت ان j عبارة عن حالة ابادة اذا كانت $\{j\}$ فئة تبادلية مغلقة والعكس صحيح .

التماريـــن :

يحلل التمرين 3.k عندما $k = 1, 2, \cdots, 10$ فضاء حالة متسلسلة ماركوف المعرفة في التمرين 2.k الى مجاميع غير مشتركة لها الخواص المذكورة في النظرية 3D.

حلل في التمارين 3.11 الى 3.13 فضاء حالة متسلسلة ماركوف المعرفة بمصفوفة الاحتمال الانتقالي المبينة ادناه الى مجاميع غير مشتركة لها الخواص المذكورة في النظرية 3D

3.11 $$P=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}.$$

3.12 $$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ .5 & .5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

3.13 $$P=\begin{bmatrix}.6 & 0 & .4 & 0 & 0\\ .2 & .6 & .2 & 0 & 0\\ .2 & 0 & .8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & .6 & .4\\ 0 & 0 & 0 & .4 & .6\end{bmatrix}.$$

6.4 ازمنة التواجد وازمنة العبور الاول

نصنف حالات متسلسلة ماركوف الى مجموعتين وذلك لاجل دراسة التطور الزمني للمتسلسلة : الحالات التي يمر بها النظام بصورة غير منتهية على الاغلب والحالات التي يمر بها النظام بصورة منتهية على الاغلب .

لايمكن للمتسلسلة على المدى الطويل أن تكون في أي من الحالات الاخيرة ولذلك نحتاج أن ندرس التطور الزمني للمتسلسلة عندما تتحرك بين الحالات التي تمر بها بصورة غير منتهية على الاغلب . نطور في هذا البند معياراً لتصنيف حالات متسلسلة ماركوف الى هاتين المجموعتين نقوم بتقديم مفهوم ازمنة تواجد الحالة لهذا الغرض .

تأمل متسلسلة ماركوف $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ نعرف $N_k(n)$ بانها عدد مرات المرور في الحالة k خلال الانتقالات n الاولى لأية حالة k ولكل $n = 1, 2, \cdots$ بصورة ادق $N_k(n)$ تساوي عدد $N_k(n)$ الاعداد الصحيحة v ،التي تحقق $1 \leq v \leq n$ ، $X_v = k$ نطلق عليها بزمن التواجد *occupation* للحالة k خلال الانتقالات الاولى n .

يطلق على المتغير العشوائي

$$N_k(\infty) = \underset{n \to \infty}{\text{غـــا}} N_k(n) \tag{4.1}$$

بانه زمن التواجد الكلي للحالة k .

من المناسب تمثيل ازمنة التواجد على شكل مجموع من المتغيرات العشوائية .

نعرف لكل حالة k ولكل $n = 1, 2, \cdots$ مايلي :

$$\begin{aligned} Z_k(n) &= 1 \quad \text{if} \quad X_n = k, \\ &= 0 \quad \text{if} \quad X_n \neq k. \end{aligned} \tag{4.2}$$

بعبارة اخرى $Z_k(n)$ تساوي 1 أو صفراً حسب وجود المتسلسلة في الزمن n في الحالة k . بامكاننا أن نكتب مايلي :

$$N_k(n) = \sum_{m=1}^{n} Z_k(m), \tag{4.3}$$

$$N_k(\infty) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_k(m). \tag{4.4}$$

نعرف بعد ذلك الاحتمالات الاتية . لكل من حالتي j k

$$f_{j,k} = P[N_k(\infty) > 0 \mid X_0 = j], \tag{4.5}$$
$$g_{j,k} = P[N_k(\infty) = \infty \mid X_0 = j]. \tag{4.6}$$

بعبارة اخرى $f_{j,k}$ عبارة عن الاحتمال الشرطي لكل مرور في الحالة k اذا علمت ان المتسلسلة الماركوفية في البداية كانت عند الحالة j بينما $g_{j,k}$ عبارة عن الاحتمال الشرطي للمرور غير المنتهي في الحالة k اذا علمت ان المتسلسلة الماركوفية كانت في البداية عند الحالة j .

من الممكن ان تكون الاحتمالات في المعادلتين 4.5 غير معرفة لان $P[X_0 = j] = 0$. نعني في الحقيقة بالمعادلتين 4.5 4.6 كما يلي :

$$f_{j,k} = P[N_k(\infty) - N_k(m) > 0 \mid X_m = j], \tag{4.7}$$
$$g_{j,k} = P[N_k(\infty) - N_k(m) = \infty \mid X_m = j], \tag{4.8}$$

لجميع قيم m . ان الكميات في المعادلتين 4.7، 4.8 مستقلة عن قيم التي

تكون هذه الكميات معرفة عندها في حالة متسلسلات ماركوف ذات الاحتمالات الانتقالية المتجانسة . نكتب جميع التعاريف المقبلة على شكل المعادلتين 4.5 ، 4.6 ويجب تفسيرها على شكل المعادلتين 4.7 4.8

نرمزللاحتمال الشرطي للعبور الاول من j الى k الذي يحدث في n خطوة فقط بالرمز $f_{j,k}(n)$ بصورة ادق

$$f_{j,k}(n) = P[V_k(n) \mid X_0 = j], \tag{4.9}$$

حيث نعرف لكل حالة k ولكل عدد صحيح $n = 1, 2, \cdots$ مايلي

$$V_k(n) = [X_n = k, X_m \neq k \quad \text{for} \quad m = 1, 2, \ldots, n-1]. \tag{4.10}$$

بعبارة اخرى $V_k(n)$ عبارة عن حادثة ان الزمن الاول من بين الازمنة $1, 2, \cdots$ الذي يتم المرور عنده بالحالة k هو الزمن n

نطلق على $f_{j,k}(n)$ باحتمال العبور الاول من حالة j الى حالة k في الزمن n بينما نطلق على $f_{j,k}$ باحتمال العبور الاول من j الى k

مثال 4A

متسلسلة ماركوف ذات الحالتين :

في متسلسلة من متسلسلات ماركوف ذات الحالتين صفر ، 1 نكتب احتمالات العبور الاول $f_{j,k}(n)$ كما يلي :

$$\begin{aligned}
&f_{0,0}(1) = p_{0,0},\\
&f_{0,0}(n) = p_{0,1}\,\{p_{1,1}\}^{n-2}\,p_{1,0},\ n \geq 2,\\
&f_{0,1}(n) = \{p_{0,0}\}^{n-1}\,p_{0,1},\ n \geq 1,\\
&f_{1,0}(n) = \{p_{1,1}\}^{n-1}\,p_{1,0},\ n \geq 1,\\
&f_{1,1}(1) = p_{1,1},\\
&f_{1,1}(n) = p_{1,0}\,\{p_{0,0}\}^{n-2}\,p_{0,1},\ n \geq 2.
\end{aligned}$$

نظرية : 4A

لاية حالتين j k فان

$$f_{j,k} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{j,k}(n). \qquad 4.11)$$

البرهان :

لكى نبرهن المعادلة 4.11 نعرف مايلي :

$$n > 0] = [N_k(\infty) > 0] \qquad (4.12)$$

عدد صحيح $V_k = [X_n = k$ بما ان V_k عبارة عن اتحاد تتابع المجاميع غير المشتركة $\{V_k(n), n = 1, 2, \cdots\}$ فسنحصل على

$$f_{j,k} = P[V_k \mid X_0 = j] = \sum_{n=1}^{\infty} P[V_k(n) \mid X_0 = j] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{j,k}(n). \quad (4.13)$$

الصيغة الاساسية الاتية عبارة عن علاقة بين الاحتمالات الانتقالية $p_{j,k}(n)$ واحتمالات العبور الاول

نظرية 4B

لاية حالتين j k ولكل عدد صحيح $n \geq 1$ فان

$$p_{j,k}(n) = \sum_{m=1}^{n} f_{j,k}(m)\, p_{k,k}(n-m) \qquad (4.14)$$

نعرف

$$p_{j,k}(0) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad j = k \\ 0 & \text{if} \quad j \neq k. \end{cases} \qquad (4.15)$$

البرهان :

لكي نبرهن المعادلة 4.14 نكتب مايلي :

$$\begin{aligned} P[X_n = k \mid X_0 = j] &= \sum_{m=1}^{n} P[X_n = k, X_m = k, X_q \neq k \text{ for } q = 1, \ldots, m-1 \mid X_0 = j] \\ &= \sum_{m=1}^{n} P[X_n = k \mid X_m = k] P[X_m = k, \\ &\qquad X_q \neq k \text{ for } q = 1, \ldots, m-1 \mid X_0 = j] \qquad (4.16) \\ &= \sum_{m=1}^{n} f_{j,k}(m)\, p_{k,k}(n-m). \end{aligned}$$

يستعمل الاسلوب المستخدم في المعادلة 4.16 في دراسة متسلسلات ماركوف ويسمى باسلوب المدخل الاول *method of first entrance* نصف القاعدة العامة لهذا الاسلوب كما يلي . لاية حادثة A (مثل الحادثة $A = [X_n = k]$) نكتب مايلي :

$$P[AV_k \mid X_0 = j] = \sum_{m=1}^{\infty} P[AV_k(m) \mid X_0 = j]. \qquad (4.17)$$

نفترض الان ان A عبارة عن مجموعة جزئية لـ V_k وان لكل عدد صحيح m توجد حادثة A_m تعتمد فقط على المتغيرات العشوائية $\{X_t, t > m\}$ بحيث

$$A\ V_k(m) = A_m\ V_k(m). \qquad (4.18)$$

باستخدام خاصية ماركوف نحصل على

$$\begin{aligned} P[A_m V_k(m) \mid X_0 = j] &= P[A_m \mid V_k(m), X_0 = j]\ P[V_k(m) \mid X_0 = j] \\ &= P[A_m \mid X_m = k]\ f_{j,k}(m). \end{aligned} \qquad (4.19)$$

نحصل من المعادلتين 4.17 ، 4.19 على الصيغة الاساسية لاسلوب المدخل الاول :

$$P[A \mid X_0 = j] = \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,k}(m)\ P[A_m \mid X_m = k]. \qquad (4.20)$$

عندما نستخدم اسلوب المدخل الاول نحتاج الى تعريف الحادثة A_m وانه من السهولة بمكان تقييم $P[A_m \mid X_m = k]$

كتوضيح اخر لاسلوب المدخل الاول . نبرهن الصيغ المفيدة الاتية :

نظرية 4C

لان حالتين j ، k فان

$$g_{k,k} = \underset{n \to \infty}{\text{غا}}\ (f_{k,k})^n, \qquad (4.21)$$

$$g_{j,k} = f_{j,k}\, g_{k,k}. \qquad (4.22)$$

البرهـــان :

لكي نبرهن المعادلة 4.22 نستخدم المعادلة 4.20 عندما تكون $A = [N_k(\infty) = \infty]$ فان $A_m = [N_k(\infty) - N_k(m) = \infty]$

$$P[N_k(\infty) = \infty \mid X_0 = j] = \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,k}(m)\ g_{k,k}, \qquad (4.23)$$

لان $P[N_k(\infty) - N_k(m) = \infty \mid X_m = k] = g_{k,k}$ نحصل من المعادلتين 4.23 4.11 على المعادلة 4.22

لكي نبرهن المعادلة 4.21 نلاحظ انه باستخدام اسلوب المدخل الاول . ولكل عدد صحيح $n \geq 1$

$$P[N_k(\infty) \geq n \mid X_0 = k]$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} f_{k,k}(m) \, P[N_k(\infty) - N_k(m) \geq n-1 \mid X_m = k]. \quad (4.24)$$

بما ان

Since $P[N_k(\infty) - N_k(m) \geq n-1 \mid X_m = k] = P[N_k(\infty) \geq n-1 \mid X_0 = k]$,

فاننا نحصل من المعادلتين 4.24 ، 4.11 عندما يكون $n \geq 1$ على

$$P[N_k(\infty) \geq n \mid X_0 = k] = P[N_k(\infty) \geq n-1 \mid X_0 = k] f_{k,k}. \quad (4.25)$$

نحصل من المعادلة 4.25 وبالاستنتاج الرياضي على

$$P[N_k(\infty) \geq n \mid X_0 = k] = (f_{k,k})^n, \; n \geq 1.$$

وهكذا فان

$$P[N_k(\infty) = \infty \mid X_0 = k] = \underset{n \to \infty}{\text{غـا}} P[N_k(\infty) \geq n \mid X_0 = k]$$
$$= \underset{n \to \infty}{\text{غـا}} (f_{k,k})^n. \quad (4.26)$$

وهو المطلوب اثباته للمعادلة 4.21 .

تؤدي النظريتان 4D ، 4E دوراً اساسياً في خالة تبويب حالات المتسلسلة .

نظرية 4D

قانون الصفر – واحـد :

لكل حالة k, تكون $g_{k,k} = 1$ او $g_{k,k} = 0$ فضلا عن ذلك

(4.27)	$g_{k,k} = 1$	اذا كانت	$f_{k,k} = 1,$	والعكس صحيح
(4.28)	$g_{k,k} = 0$	اذا كانت	$f_{k,k} < 1$	والعكس صحيح

بعبارة اخرى . تنص النظرية 4D اذا ابتدأت المتسلسلة الماركوفية في k, فانها تعود

الى k، باحتمال يساوي 1 وانها ستمر بالحالة k عدداً من المرات غير منتهية وباحتمال يساوي 1 .من جانب اخر نتوقع ان تعود الى k عدداً محدوداً من المرات ان وجد احتمال موجب لعدم عودتها .

ان النظرية 4D عبارة عن نتيجة مباشرة للمعادلة 4.21 .من المعادلة 4.21 نحصل على

$$f_{k,k} < 1 \quad \text{تعني} \quad g_{k,k} = 0,$$
$$f_{k,k} = 1 \quad \text{تعني} \quad g_{k,k} = 1$$

وهكذا فان $g_{k,k} = 1$ تعني $f_{k,k} = 1$ لانه اذا كانت $f_{k,k}$ لاتساوي 1 فان $g_{k,k}$ سوف لاتساوي 1 .

مثال 4B

لايمكن ان تكون عملية التفرع كبيرة :

نفرض ان X_n عبارة عن حجم الجيل النوني لعملية التفرع المعتبرة في المثال 2C . اثبتنا سابقا ان احتمال الانقراض π_0، يعتمد على المتوسط لعدد ذرية فرد ما . اي ان $X_n = 0$ عندما تقترب n الى ∞. نبرهن الان بغض النظر عن قيمة μ وبغض النظر عن الحجم الابتدائي للمجتمع ان المجتمع سينقرض وسيصبح كبيراً بصورة غير محدودة .

لكي نبرهن ماجاء اعلاه نبرهن مايلي :

$$f_{k,k} < 1 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.29}$$

من ذلك نحصل على

$$g_{k,k} = 0 \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots ;$$

بعبارة اخرى لاتوجد قيمة موجبة k افتراضية تساوي مالانهاية لحجم المجتمع X_n . اي مجموعة محدودة من القيم الموجبة $1, \ldots, M$ يمكن ان تكون حجم المجتمع X_n لعدد محدود (ولو انه عشوائي) من الاجيال n. وهكذا فان المعادلة 4.29 تعني ان حجم المجتمع سيكون صفراً . او ∞.

لكي نبرهن المعادلة 4.29 نلاحظ اذا كانت لاتوجد ذرية لـ k من افراد المجتمع فان المجتمع سيتميز بحيث $f_{k,k} < 1 - (p_0)^k < 1$

لان $p_0 > 0$

نظرية : 4E

لكل حالة k لمتسلسلة ماركوف فان

$f_{k,k} < 1$ اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} p_{k,k}(n) < \infty,$ والعكس صحيح

(4.30) $f_{k,k} = 1$ اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} p_{k,k}(n) = \infty.$ والعكس صحيح

نستخدم طريقة الدوال المولدة لبرهنة النظرية 4E نعرف الدوال المولدة

$$P_{j,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{j,k}(n) = \delta_{j,k} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n p_{j,k}(n),$$

$$F_{j,k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n f_{j,k}(n) \qquad (4.31)$$

لجميع الاعداد الحقيقية z بحيث $|z| < 1$

نظرية 4F

لاي حالتين j k لمتسلسلة ماركوف فان العلاقة بين الدالتين المولدتين $P_{j,k}(z)$ $F_{j,k}(z)$مبينة كما يلي عندما $|z| < 1$

$$P_{j,k}(z) = F_{j,k}(z)\, P_{k,k}(z) \quad \text{if} \quad j \neq k, \qquad (4.32)$$

$$P_{k,k}(z) - 1 = F_{k,k}(z)\, P_{k,k}(z), \qquad (4.33)$$

$$P_{k,k}(z) = \frac{1}{1 - F_{k,k}(z)}, \; F_{k,k}(z) = 1 - \frac{1}{P_{k,k}(z)}. \qquad (4.34)$$

البرهان :

نضرب طرفي المعادلة 4.14 بالكمية z^n ونجد حاصل الجمع . عندما $n = 1, 2, \cdots$

نحصل على .

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n p_{j,k}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{m=1}^{n} f_{j,k}(m) p_{k,k}(n-m). \qquad (4.35)$$

نحصل عندما نغير موقع الجمع على .

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n p_{j,k}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} z^n f_{j,k}(m) p_{k,k}(n-m)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} z^m f_{j,k}(m) \sum_{n=m}^{\infty} z^{n-m} p_{k,k}(n-m)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} z^m f_{j,k}(m) \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu p_{k,k}(\nu),$$

والتي يمكن ان تكتب بدلالة الدوال المولدة كما يلي :

$$P_{j,k}(z) - \delta_{j,k} = F_{j,k}(z)\, P_{k,k}(z) \qquad (4.36)$$

وهو المطلوب اثباته .

تأتي اهمية الدوال المولدة من الخاصيتين الاتيتين :

نظرية 4G .

نظريات غاية الدوال المولدة :

نفرض ان $\{a_n\}$ عبارة عن تتابع غير سالب من الاعداد الحقيقية بدالة مولدة

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \; |z| < 1. \qquad (4.37)$$

لكي يوجد عدد محدود S بحيث

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} \sum_{m=0}^{n} a_m = S \qquad (4.38)$$

فانه من اللازم والضروري وجود عدد محدود S بحيث

$$\underset{z\to 1-}{\text{غا}} A(z) = S. \qquad (4.39)$$

(نعني بالغاية $z \to 1-$ هي الغاية التي تقربها z عندما تكون قيم z اقل من 1 . من اجل ان يوجد عدد محدود L بحيث

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} a_m = L \qquad (4.40)$$

فانه من اللازم والضروري وجود عدد محدود L بحيث

$$\underset{z\to 1-}{\text{غـا}} (1-z)\, A(z) = L. \qquad (4.41)$$

تقع حقيقة تكافؤ المعادلتين 4.40 ، 4.41 خارج نطاق هذا الكتاب لانها تتطلب تحليلاً رياضيا متقدماً (راجع Hardy [1949] نظرية 6 ص 155 للحصول على البرهان) .

نبرهن تكافؤ المعادلتين 4.38 ، 4.39 كما يلي :

اذا امكن جمع التابع $\{a_n\}$ بصورة مطلقة فانه باستخدام نظرية التقارب المفضلة (راجع الملحق في نهاية هذا الفصل) نحصل على :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \text{implies} \quad \lim_{z \to 1-} A(z) = S. \tag{4.42}$$

وبالعكس دعنا نبرهن اذا كانت $a_n \geq 0$ لجميع قيم $n,$ فان

$$\lim_{z \to 1-} A(z) = S < \infty \quad \text{implies} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S. \tag{4.43}$$

لكي نبرهن المعادلة 4.43 نلاحظ انه لاي عدد صحيح N $0 < z < 1$ فان

$$\sum_{n=1}^{N} a_n z^n \leq A(z). \tag{4.44}$$

بايجاد قيمة المعادلة 4.44 عندما تقترب z الى 1 نحصل على

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{z \to 1-} \sum_{n=1}^{N} a_n z^n \leq S, \tag{4.45}$$

نحصل من المعادلة ,4.45 على ان تابع المجموعات المتعاقبة

$$\left\{\sum_{n=0}^{N} a_n, N = 1, 2, \ldots\right\}$$

عبارة عن تابع مطرد محدود .وهكذا فان المتوالية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب فان قيمتها تساوي S وذلك من المعادلة 4.42 .

نستطيع الان برهنة النظرية 4E .نحتاج الان ان نبرهن المعادلة 4.30 .

نحصل من المعادلات ,4.34 ,4.38 4.39 على $1 >$ اذاكانت $f_{k,k} < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_{k,k}(n) < 1$ والعكس صحيح .اذا كانت $F_{k,k}(z) < 1$ غـا اذاكانت $P_{k,k}(z) < \infty$ غـا$_{z \to 1-}$ والعكس صحيح .

اذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} p_{k,k}(n) < \infty.$ والعكس صحيح .

نتيجةلذلك فان النظرية الاتية تؤدي دوراً مهماً – نعرف لكل حالة k كما يلي

$$m_{k,k}=\sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{k,k}(n). \qquad (4.46)$$

نظـــرية : 4H

نفرض ان k عبارة عن حالة بحيث $f_{k,k}=1$، $m_{k,k}<\infty$. ان :

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}}\ \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p_{k,k}(m)=\frac{1}{m_{k,k}}, \qquad (4.47)$$

وان لكل حالة j ،

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}}\ \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p_{j,k}(m)=f_{j,k}\,\frac{1}{m_{k,k}}. \qquad (4.48)$$

لكي تبرهن المعادلة 4.47 على ضوء تكافؤ المعادلتين 4.41, 4.40 نحتـاج ان نبرهن ما يلي :

$$\lim_{z\to1}\,(1-z)\,P_{k,k}(z)=\frac{1}{m_{k,k}}. \qquad (4.49)$$

لكي نبرهن المعادلة 4.49 على ضوء المعادلة 4.34 تحتاج ان نبرهن :

$$\lim_{z\to1}\frac{1-F_{k,k}(z)}{1-z}=m_{k,k}. \qquad (4.50)$$

تتحقق صحة المعادلة 4.50 بسهولة لان

$$\underset{z\to1}{\text{غـا}}\ \frac{1-F_{k,k}(z)}{1-z}=\frac{d}{dz}F_{k,k}(z)\Big|_{z=1}=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{k,k}(n)=m_{k,k}. \qquad (4.51)$$

بنفس الطريقة فان المعادلة 4.48 عبارة عن نتيجة مباشرة للمعادلتين 4.32، 4.50 وتكافؤ المعادلتين 4.40 و 4.41

المكمـلات :

اثبت في المكملات 4A الى 4I صحة تحقيق العلاقات المعطاة لكل حالتين k ، j لتسلسلة مار كوف .

$$\sup_n p_{j,k}(n) \leq f_{j,k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n).$$ **4A**

ونتيجة لذلك فان (i) $j \to k$ اذا كانت $f_{j,k} > 0$ والعكس صحيح (ii) $j \leftrightarrow k$
اذا كانت $f_{j,k}f_{k,j} > 0$ والعكس صحيح

4B $$\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n) = f_{j,k} \sum_{n=0}^{\infty} p_{k,k}(n)$$

4C ان وجدت $\text{غا}_{n \to \infty} \; p_{k,k}(n) = \pi_k$ exists, فان

$$\text{غا}_{n \to \infty} \; p_{j,k}(n) = f_{j,k}\, \pi_k.$$

تلميح : اثبت ان لكل $N \geq 1$ فان

$$p_{j,k}(n) - f_{j,k}\, \pi_k = \sum_{m=1}^{n} f_{j,k}(m) \{p_{k,k}(r) - \pi_k\} - \sum_{m=n+1}^{\infty} \pi_k\, f_{j,k}(m),$$

$$| p_{j,k}(n) - f_{j,k}\, \pi_k | \leq \sum_{m=1}^{N} f_{j,k}(m)\, | p_{k,k}(n) - \pi_k | + 2 \sum_{m=N+1}^{\infty} f_{j,k}(m).$$

نفرض ان $n \to \infty$ اولا ثم $N \to \infty$

ان وجدت

If 4D $$\text{غا}_{N \to \infty} \; \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} p_{k,k}(m) = \pi_k \text{ exists},$$

فان

$$\text{غا}_{N \to \infty} \; \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} p_{j,k}(m) = f_{j,k}\pi_k.$$

4E اذا كانت $f_{k,k} < 1$ فان لاية حالة j

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n) < \infty,$$

(ii) $$\text{غا}_{n \to \infty} \; p_{j,k}(n) = 0,$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} p_{k,k}(n) = \frac{f_{k,k}}{1 - f_{k,k}}.$$

4F نعبر عن المتوسط الشرطي لزمن التواجد الكلي بدلالة الاحتمالات الانتقالية $p_{j,k}(n)$
اثبت ان

$$E[N_k(\infty) \mid X_0 = j] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n).$$

4G اثبت اذا حقق التابع $\{a_n, n = 1, 2, \cdots\}$ المعادلة 4.40 فانه يحقق 4.41

تلميح : حقق أن

Hint. Verify that (i) $(1-z)A(z) - Lz = (1-z)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - L)n z^n,$

$b_n = (a_1 + \cdots + a_n)/n;$ حيث

(ii) لاي N

$$|(1-z)A(z) - Lz| \leq (1-z)^2 \sum_{n=1}^{N} |(b_n - L)n z^n| + \sup_{n>N} |b_n - L|.$$

افرض $z \to 1$ وان $N \to \infty$

6,5 الفئات والحالات المعاودة واللامعاودة :

- لكي ندرس السلوك المقارب لمتسلسلات ماركوف فانه من الضروري القدرة على تحديد الفئات التبادلية المغلقة وغير المغلقة . من اجل هذا نقوم بعرض مفهوم الفئة المجاورة .

يقال ان حالة k معاودة اذا كان $f_{k,k} = 1$ او بعبارة اخرى k حالة معاودة اذا رجعت المتسلسلة الماركوفنية نهائيا الى k باحتمال واحد علما ان المتسلسلة قد بدأت عند k ويقال ان k غير معاودة اذا كانت $f_{k,k} < 1$.

ملاحظـــة :

بعض الكتاب (وبصورة خاصة فيلر Feller) يطلقون على الحالة المعاودة بالحالة *persistent* وعلى الحالة اللامعاودة بالحالة *transient.* لقد استخدمنا المصطلحات المستعملة من قبل Chung سنة (1960) Kendall سنة (1959).

يقال انفئة الحالات C معاودة اذا كانت جميع الحالات الموجودة في C معاودة . وبنفس الطريقة يقال للفئة C لامعلومة اذا كانتجميع حالاتها غير معاودة .

نظرية : 5A

لنفرض ان C عبارة عن فئة تبادلية لحالات المتسلسلة الماركوفية تكون C اماتكون فئة معاودة اولامعاودة بصورة ادق ، (i) اذا كانت اية حالة في C معاودة فان جميع حالات C تكون معاودة .

(ii) اذا كانت اي حالة في C غيرمعاودة فان جميع حالات C تكون غير معاودة.

البـــرهـــان :

نبرهن ان لاية حالتين j ، k في متسلسلة ماركوف اذا كانت $f_{k,k} = 1$ واذا كانت $j \leftrightarrow k$ فان

$$f_{j,j} = 1 \qquad (5.1)$$

بعبارة اخرى ، تنص المعادلة 5.1 على ان الحالات المعاودة تتبادل مع الحالات المعاودة فقط .

وهكذا فان الحالات اللامعاودة تتبادل مع الحالات اللامعاودة فقط .

لكي نبرهن المعادلة 5.1 نبرهن ما يلي :

اذا كانت $\sum_n p_{k,k}(n) = \infty$ ، اذا كانت $j \leftrightarrow k$ فان $\sum_n p_{j,j}(n) = \infty$

باستخدام معادلة جابمان كولموكروف نحصل لاي اعداد صحيحة N, n . M على :

$$p_{j,j}(N+n+M) = \sum_{a,b} p_{j,a}(N)\, p_{a,b}(n)\, p_{b,j}(M) \geq p_{j,k}(N)\, p_{k,k}(n)\, p_{k,j}(M), \qquad (5.2)$$

بحيث

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,j}(N+n+M) \geq p_{j,k}(N)\, p_{k,j}(M) \sum_{n=0}^{\infty} p_{k,k}(n). \qquad (5.3)$$

اختر الان M ، N بحيث يكون $p_{j,k}(N) > 0$ $p_{k,j}(M) > 0$ فان عدم تقارب المتوالية اللانهائية في جهة المعادلة 5.3 اليمنى يعني عدم تقارب المتوالية اللانهائية الموجودة في الجهة اليسرى .وهو المطلوب اثباته .

نظرية 5 B

تكون الفئة التبادلية المعاودة مغلقة . تحتوي الفئة التبادلية غير المعاودة المغلقة على عدد غير محدود من الحالات .

نستطيع باستخدام النظريتين 5A ـ 5B من توسيع نظرية التحليل لتسلسلات ماركوف المعطاة في النظرية 3D وكما يلي :

نظريــة التحليل : Decomposition theorem

يمكن كتابة المجموعة S للحالات العائدة لمتسلسلة ماركوف على شكل اتحاد من الفئات التبادلية غير المشتركة

$$S = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r \cup \ldots$$

حيث ان كل فئة C_r إما (i) فئة متعادلة مغلقة (ii) فئة غير معاودة مغلقة (iii) او فئة غيرمعاودة غيرمغلقة . لاتوجد لمتسلسلة ماركون المحدود فئات تبادلية غيرمعاودة مغلقة نلخص في الجدول 6.2. ما جاء اعلاه

جدول 6.2. تبويب الفئات التبادلية

	مغلقة	غير مغلقة
معاودة		لاتوجد
غير معاودة	لاتوجد في حالة المتسلسلة المحدودة	

بما انه يمكن فصل فئة C التبادلية المغلقة من متسلسلة ماركوف ومعالجتها كمتسلسلة لماركوف بنفسها . يتبين ان لدراسة الخواص المقاربة لمتسلسلة ماركوف تحتاج ان ندرس الخواص المقاربة لمتسلسلة ماركوف عندما توجد فئة تبادلية مغلقة واحدة فقط (والتي تكون معاودة اوغيرمعاودة) وان جميع الفئات التبادلية الاخرى عبارة عن فئات غيرمعاودة غير مغلقة .

البرهان للنظرية : 5B

نبرهن ان الفئة التبادلية المعاودة تكون مغلقة وذلك باثبات ما يلي :

(5.4) اذا كانت $f_{j,k}=1$ $k \leftrightarrow j$ فان $f_{k,k}=1$ $k \rightarrow j$

بعبارة ثانية . ان الحالات الوحيدة التي يمكن الوصول اليها من الحالة المعاودة هي الحالات التي تتبادل مع الحالة المعاودة . لكي نبرهن المعادلة 5.4 نتحقق من ان لاي حالة k ولكل عدد صحيح n

$$g_{k,k} = \sum_{\text{حالات } i} p_{k,i}(n)\, g_{i,k},$$

$$1-g_{k,k} = \sum_{\text{حالات } i} p_{k,i}(n)\{1-g_{i,k}\}. \qquad (5.5)$$

يختفي المجموع الثاني في المعادلة 5.5 للحالة المعاودة k وهكذا فان لكل عدد صحيح n ولكل حالة i

$$0 = p_{k,i}(n)\ \{1-g_{i,k}\}. \qquad (5.6)$$

اذا امكن الوصول الى j من k فسيوجد عدد صحيح N بحيث $p_{k,j}(N)>0$ افرض ان $i=j$ $n=N$ في المعادلة 5.6 نحصل على $g_{j,k}=1$ اذن $f_{j,k}=1$ لانه من المعادلة 4.22 نحصل على

$$g_{j,k}=f_{j,k} \text{ if } k \text{ is recurrent.} \qquad (5.7)$$

اذا كانت k معاودة .

لكي نبرهن ان الفئة التبادلية المغلقة غير المعاودة تكون غير محدودة نلاحظ اولا من المعادلة 4.22 ان لكل حالة j . k

(5.8) $g_{j,k}=0$ اذا كانت k غير معاودة

بعبارة اخرى . اذا كانت حالة k غير معاودة . فان عدد مرات المرور بالحالة k سيكون عدداً محدوداً فقط وباحتمال يساوي 1 اذا ابتدأت في اية حالة j ونتيجة لذلك . اذا كانت C فئة تبادلية غير معاودة مغلقة فان C يجب ان تحتوي على عدد غير محدود من الحالات لانه باحتمال 1 تبقى المتسلسلة عدداً محدوداً من الخطوات فقط في اية مجموعة محدودة من الحالات غير المعاودة . وهو المطلوب اثباته .

المشكلة المهمة جداً ايجاد معيار لكون الفئة التبادلية معاودة اوغير معاودة . نجد المعيار الاتي مفيداً جداً .

نظريــة 5C

نفرض ان C عبارة عن فئة تبادلية مغلقة من الحالات وافرض ان k عبارة عــــن محددة في C . تكون C معاودة اذا كانت لكل حالة j في C بحيث ((5.9)) $f_{j,k}=1$ والعكس صحيح

البــرهــان :

اذا كانت C معاودة فان باستخدام المعادلة .5.4 تتحقق صحة المعادلة 5.9 .
وبالعكس نستطيع التحقق مما يلي :

$$f_{k,k}=p_{k,k}+\sum_{\substack{j\in C\\ j\neq k}} p_{k,j}\ f_{j,k}. \tag{5.10}$$

نحصل من المعادلتين 5.9 ،5.10 على

$$f_{k,k}=p_{k,k}+\sum_{\substack{j\in C\\ j\neq k}} p_{k,j}=1. \tag{5.11}$$

وهو المطلوب اثباته

الحالات الاساسية وغير الاساسية :

تكون الحالة k اساسية اذا تبادلت مع كل حالة يمكن الوصول اليها من (نكتب ذلك بالرموز $k\to j$ يعني $(k\leftrightarrow j)$) اما ماعدا ذلك فستكون غير اساسية .

يمكننا الان اعادة صياغة المعادلة 5.4 : تكون الحالة المعاودة اساسية . من هذا يتبيــن ان الحالة غير الاساسية تكون غير معاودة . يجب ان نلاحظ ان الحالة الاساسية قد تكون معاودة . نعتبر في المثال 6B متسلسلة ماركوف حيث تكون كل حالة اساسية (لان جميع ازواج الحالات تبادلية) وان كل حالة تكون غير معاودة . i, j, k

المكمــلات :

SA - متباينة لاحتمالات العبور الأول . اثبت ان لأية حالة k , j , i . في متسلسلة ماركوف

$$f_{i,k}\geq f_{i,j}\,f_{j,k}.$$

تلميح . نفرض ان $f_{i,j,k}$ عبارة عن احتمال الابتداء في i ثم العبور الى j فــي زمن ما ومن ثم الى k في زمن لاحق . اثبت ان

$$f_{i,k}\geq f_{i,j,k}=f_{i,j}\,f_{j,k}.$$

5B برهن اذا كانت k_1 , k_2 حالتين, تبادليتين معاودتين فان لاي حالـــة j
$f_{j,k_1} = f_{j,k_2}$.

تلميح : استخدم المكملة .5A

5C معيار للعودة :

اثبت ان الفئة التبادلية C غير معاودة (معاودة) ان وجدت حالة k في C حيـــث $\sum_{n=1}^{\infty} p_{k,k}(n) < \infty (= \infty)$. والعكس صحيح

5D المشيات العشوائية المعاودة وغير المعاودة :

تأمل المشية العشوائية ذات البعد الواحد بالاعداد الصحيحة $\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. في كل مرحلة تتم الحركة الى اليمين باحتمال p، والى الشمال باحتمال $q = 1 - p$

اثبت ان لكل عدد صحيح m :

$$p_{0,0}(2m) = \binom{2m}{m} p^m q^m.$$

استخدم صيغة سترلنك Stirling's لاثبات ان :

$$\binom{2m}{m} \sim \frac{4^m}{\sqrt{\pi m}},$$

$$p_{0,0}(2m) \sim \frac{(4pq)^m}{\sqrt{\pi m}}.$$

ونتيجة لذلك فان

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{0,0}(n) < \infty \quad \text{if} \quad p \neq \tfrac{1}{2}$$
$$= \infty \quad \text{if} \quad p = \tfrac{1}{2}.$$

استخدم المكملة ,5C لتثبت ان العودة الى اية حالة يكون اكيدة في حالة المشيـــة العشوائية المتناظرة $(p = \frac{1}{2})$ وغير اكيدة في حالة المشية العشوائية غير المتناظـرة .

5E نفرض ان Z يمثل متغيراً عشوائياً قيمة الممكنة هي الاعداد الصحيحة ; $0, \pm 1, \cdots$ اي ان

$$p_k \equiv P[Z = k] > 0 \quad \text{for} \quad k = 0, \pm 1, \cdots; \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1.$$

افترض ان $E[\,|\,Z\,|\,] < \infty$ نفرض ان $Z_1, Z_2, \cdots$ عبارة عن تتابع من المتغيرات العشوائية المستقلة المتماثلة التوزيع كالمتغير Z نفرض عندما $n = 1, 2, \cdots$, ان $X_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ يمثل المجموع النوني المتعاقب . ان التابـــع $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف. (i) صف مصفوفة احتمالهـا الانتقالي .

(ii) اثبت ان متسلسلة ماركوف $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ معاودة اذا كـــان $E[Z] = 0.$ والعكس صحيح .

6-6 العبور الاول واحتمالات الابادة :

توجد اربع حالات يجب معرفتها كما مبينة في الجدول .6.3 وذلك من اجل تحديد الاحتمـــال $f_{j,k}$ (ان متسلسلة ماركوف المبتدئة عند j تستمر بالتأكيد فـــي k) .

جدول .6.3 اساليب تحديد العبور الاول

		k: معاودة	k: غير معاودة
j	معاودة	$f_{j,k} = 1$ اذا كان $k \leftrightarrow j$ والعكس صحيح $f_{j,k} = 0$ ماعدا ذلك	$f_{j,k} = 0$
	غير معاودة	تحقق نظاماً من المعادلات الخطية المعطاة في النظرية	$f_{j,k} = \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n)}{\sum_{n=0}^{\infty} p_{k,k}(n)}$

يتبين في هذا البند كيفية تحديد احتمال العبور الاول $f_{j,k}$ حيث j غير معاودة وان k معاودة . كحل لنظام خطي من المعادلات المحتوية على مثل احتمالات العبور الاول هذه .

اذا اعطيت متسلسلة ماركوف فاننا سنفرض ان S تمثل مجموعة جميع الحالات وان T تمثل مجموعة الحالات اللامعاودة . يأتي استخدام T ليمثل مجموعة الحالات

اللامعاودة من الاصطلاح المستخدم من قبل الاحتماليين الذين يسمون الحالات اللامعاودة بالانتقالية .

نظـريـة : 6A

اذا كانت k حالة معاودة فان مجموعة احتمالات العبور الاول $\{f_{j,k}, j \in T\}$ ستحقق نظام المعادلات

$$f_{j,k} = \sum_{i \in T} p_{j,i} \, f_{i,k} + \sum_{i \in C} p_{j,i}, \quad j \in T, \tag{6.1}$$

حيث C تمثل مجموعة جميع الحالات التي تتبادل مع k

البرهان :

S تمثل مجموعة حالات متسلسلة ماركوف كماسبق . نحقق بسهولة مايلي :

$$f_{j,k} = \sum_{i \in S} P[N_k(\infty) > 0 \mid X_1 = i] \, P[X_1 = i \mid X_0 = j].$$

اذن

$$f_{j,k} = \sum_{i \in S} p_{j,i} \, f_{i,k}.$$

$f_{i,k} = 1$ اذاكان i ينتمي الى C وان $f_{i,k} = 0$ اذاكان i لاينتمي الى C ولا الى T وهو المطلوب اثباته .

ملاحظة :

اذاكانت k_1 ، k_2 عبارة عن حالتين معاودتين تبادلتين فان لـكل حالة j

$$f_{j,k_1} = f_{j,k_2}.$$

يمكن برهنة هذه الملاحظة اما باستخدام المعادلة 6.1 اوباستخدام المكملة 5A نتيجة لذلك يمكننا تعريف الاحتمال $f_{j,k}$ ليساوي $f_{j,C}$ لاية حالة k تعود الى C حيث عبارة عن احتمال ابادة (انتهاء) متسلسلة ماركوف المبتدئة في الحالة نهائياً في الصف المعاود C سنكتب بعد ذلك المعادلة 6.1 كما في الشكل الاتي :

$$f_{j,C} = \sum_{i \in T} p_{j,i} \, f_{i,C} + \sum_{i \in C} p_{j,i}, \quad j \in T. \tag{6.1'}$$

لـكي تكون النظرية 6A وسيلة مفيدة في ايجاد احتمالات العبـور الاول يجـب ان نثبت ان لنظام المعادلات 6.1 حلاً وحيداً . نعيد كتابة المعادلة 6.1 كمايلـي اذا عرفنا ان

$$b_j = \sum_{i \in C} p_{j,i}, \quad v_j = f_{j,k}$$

$$v_j = \sum_{i \in T} p_{j,i} v_i + b_j, \quad j \in T. \tag{6.2}$$

لاحظ ان معادلة 6.2 عبارة عن نظام معادلات للمتغيرات $\{v_j, j \in T\}$ غير متجانس وان $p_{j,i}$ ، b_j عبارة عن كميات ثابتة معلومة . ان الشرط اللازم والضروري لوجود حل محدود وحيد $\{v_j, j \in T\}$ لنظام المعادلات 6.2 غير المتجانس هو ان لنظام المعادلات المتجانسة

$$v_j = \sum_{i \in T} p_{j,i} v_i, \quad j \in T \tag{6.3}$$

حلاً محدوداً يساوي صفراً فقط

$v_j = 0$ لجميع قيم j العائدة الى T .

نفرض ان $a_{ji} = p_{j,i} - \delta_{j,i}$ لكي نبرهن العلاقة ادناه . لكي نفرض المشكلة بصورة سهلة افرض ان T تتكون من حالتين فقط $T = \{1, 2\}$

اذن سنكتب المعادلة 6.3 كمايلي :

$$\begin{aligned} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 &= 0 \\ a_{21} v_1 + a_{22} v_2 &= 0, \end{aligned} \tag{6.3'}$$

بينما يمكن كتابة المعادلة 6.2 كمايلي :

$$\begin{aligned} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 &= b_1 \\ a_{21} v_1 + a_{22} v_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{6.2'}$$

افترض وجود حلين (محدودين) (v_1, v_2) ، (v_1', v_2') للمعادلة $6.2'$. ان الحل (المحدود) $(v_1 - v_1', v_2 - v_2')$ عبارة عن حل للمعادلة $6.3'$ لاجل ان يكون الحلان (المحدودان) (v_1, v_2) و (v_1', v_2') للمعادلة $6.2'$ متماثلين فان الحل (المحدود) للمعادلة $6.3'$ هو الحل الذي يساوي صفراً فقط وهكذا هو الشرط اللازم والضروري .

من الممكن اعطاء معنى احتمالي حول شرعية المعادلة . عرف مايلي عندما تنتمي j الى T .

$$y_j = P[X_n \text{ belongs to } T \text{ for all } n \mid X_0 = j]. \tag{6.4}$$

بعبارة اخرى y_j عبارة عن احتمال بقاء متسلسلة ماركوف في مجموعة للحالات غير المعاودة الى الابد . اذا ابتدأت المتسلسلة في الحالة اللامعاودة T . من السهولـــة اثبات ان $\{y_j, j \in T\}$ تحقق المعادلة

$$y_j = \sum_{i \in T} p_{j,i}\, y_i,\ j \in T, \tag{6.5}$$

اذا كانت A عبارةعن حادثة بحيث X_n تنتمي الى T لجميع قيم n فـــــان

$$y_j = P[A \mid X_0 = j] = \sum_{i \in S} p_{j,i}\, P[A \mid X_1 = i].$$

نثبت بعد ذلك ان $\{y_j, j \in T\}$ عبارة عن الحل الاعظم للمعادلة (6.5) والذي يكون محدوداً بالقيمة 1 نكتب ذلك $|v_j| \leq 1$. $v_j = \sum_{i \in T} p_{j,i} v_i$ لجميع قيم j العائدة الى T وهذا يعني

$$|v_j| \leq y_j \quad \text{لجميع قيم } j \text{ العائدة الى } T \tag{6.6}$$

برهان المعادلة 6.6. : —

نعرف $y_j(n) = P[X_n \text{ belongs to } T \mid X_0 = j]$ عندما $n = 1, 2, \cdots$ تنتمي j الى T

بالامكان تحقيق

$$y_j = \lim_{n \to \infty} y_j(n).$$

نبرهن الان المعادلة 6.6 من خلال برهنة ان

$$|v_j| \leq y_j(n) \quad \text{عندما} \quad n = 1, 2, \cdots \tag{6.7}$$

نبرهن معادلة 6.7 بالاستنتاج الرياضي — ان

$$y_j(1) = P[X_1 \text{ تنتمي الى } T \mid X_0 = j]$$
$$= \sum_{i \in T} p_{j,i} \geq \left|\sum_{i \in T} p_{j,i} v_i\right| = |v_j|$$

افترض بعد ذلك تحقيق صحة المعادلة 6.7 لقيم n ان

$$y_j(n+1) = \sum_{i \in T} p_{j,i}\, y_i(n) \geq \sum_{i \in T} p_{j,i}\, |v_i| \geq \left|\sum_{i \in T} p_{j,i} v_i\right| = |v_j|$$

وهو المطلوب اثباته للمعادلة 6.7 وللمعادلة 6.6 . نحصل من المعادلتين 6.5 ، 6.6 على النظرية الاتية :

نظرية 6B

لكي يكون لنظام المعادلات المتجانسة 6.3 حل محدود هوالحل الذي يساوي صفراً فانه من اللازم والضروري

$$y_j = 0 \quad \text{لجميع قيم } j \text{ العائدة الى } T \qquad (6.8)$$

ملاحظـــة :

تتحقق صحة المعادلة (6.8) في حالة متسلسلةماركوف المحدودة لان المـــرور بالمجموعة المحدودة من الحالات اللامعاودة يكون عبارة عن عدد محدود من المرات . وهكذا فان احتمالات العبور الاول لمتسلسلة ماركوف المحدودة $\{f_{j,k}, j \in T\}$ عبارة عن الحل المحدد الوحيد لنظام المعادلات 6.1 .

يقال ان حالة k عبارة عن حالة ابادة اذا كان $p_{k,k} = 1$ بحيث تبقي المتسلسلة الى الابد عند مرورها بالحالة k من الواضح لحالات الابادة ان تكون حالات معاودة عندما تكون k حالة ابادة فان احتمال العبور الاول $f_{j,k}$ سيطلق عليه باحتمال الابادة في k للمتسلسلة المبتدئة عند j . نحصل على الصيغة الاتية من النظرية 6A .

نظام المعادلات احتمالات الابادة :

اذا كانت S عبارةعن فضاء حالة لمتسلسلة ماركوف و k عبارة عن حالة ابادة فان مجموعة احتمالات الابادة $\{f_{j,k}, j \in S\}$ تحقق نظام المعادلات

$$f_{j,k} = \sum_{i \in S} p_{j,i} f_{i,k}, \; j \in S, \qquad (6.9)$$

وفقا للشروط

$$\begin{aligned} f_{k,k} &= 1, \\ f_{j,k} &= 0 \end{aligned} \quad \text{اذا كانت } j \text{ معاودة } j \neq k \qquad (6.9')$$

مثال

احتمالات الابادة في المشيات العشوائية (مشكلة خسارة المقامر) :

المشبة العشوائية عبارة عن متسلسلة ماركوف $\{X_n, n=0, 1, \cdots\}$ في فضاء حالة يتكون من الاعداد الصحيحة (مجموعة نقاط ذات n بعد في فضاء يوكليدن) بالخاصية الاتية : اذا كان النظام في حالة معلومة k فان انتقال النظام في مرحلة واحدة اما ان يبقى عند k او ينتقل الى احد الحالات المجاورة الى k (بعبارة اخرى ينتقل النظام الى اقرب نقطة مجاورة) .

مصفوفة احتمال انتقالي للمشبات العشوائية في حالة الفضاء $\{0, 1, 2, \cdots\}$

$$P=\begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \qquad (6.10)$$

حيث p_k, r_k, q_k $(k=0, 1, \cdots)$ عبارة من اعداد حقيقية غير سالبة بحيث $r_0+p_0=1,\ q_k+r_k+p_k=1$ for $k=1, 2, \cdots$

تطور مفهوم المشبة العشوائية من خلال اعتبار الموقع المتغير العشوائي X_n لجزيئة تتحرك على خط مستقيم بشكل معين في الزمن n بحيث تستقر الجزيئة في نفس مكانها اوتتحرك خطوة الى اليمين اوخطوة الى اليسار . للمشبات العشوائية اهمية معينة وخصوصا في تقريب العمليات الفيزيائية المتعلقة بانتشار الجزيئات . نستفيد من المشبات العشوائية في تكوين نماذج تحليلية في المفاعلات النووية . يهمنا في دراسة مثل هذه المشاكل تتبع حركة جزيئة (مثل النيترون) تنجز مشبة عشوائية داخل حاوية ذات جدران مصنوعة من معدن يمتص النيترونات مثل الكادميوم . تتوقف المشبة العشوائية حال ملامسة النيترون لاحد سطوح الحاوية .

نستطيع تمثيل ثروة اللاعب الذي يقوم بسلسلة من المراهنات على شكل مشبة عشوائية تأمل وجود شخص (يسمى بيتر) يلعب مع مقامر غني جدا (مثل مقامرة كازينو) نفترض احتمال ربح بيتر لوحدة يساوي p_k اذا كانت ثروته تساوي k وان احتمال خسارته سيكون q_k وباحتمال r_k عدم حدوث تغيير في ثروته .

الحالة الخاصة والمهمة في هذا المجال هو حالة المستقلة المعادة عندما يكون احتمال ربح بيتر p ان

$$p_k = p,\ q_k = 1 - p,\ r_k = 0 \qquad \text{for } k = 1, 2, \cdots. \tag{6.11}$$

نوضح الكميتين p q كما يلي : اذا كانت $p > q$ فان نتيجة اللعبة ستكون من صالح بيتر . تتعادل اللعبة اذا كانت $p = q$ اما اذا كانت $p < q$ فان اللعبة ستكون بعكس صالح بيتر . اذا كانت المشبة العشوائية تمثل موقع الجزيئة فان $p > q$ تمثل الانحراف الى اليمين لان الجزيئة ستعاني من صدمات من جهة اليسار اكثر من جهة اليمين عندما $p = q = 1/2$ فانه المشبة العشوائية متناظرة .

توجد عدة افتراضات حول r_0 ، p_0 سنعتبر الإعتبارين الاتيين :

(i) المشبة العشوائية وحاجز الابادة عند الصفر (مشكلة خسارة المقامر)

$$r_0 = 1,\ p_0 = 0; \tag{6.12}$$

(ii) المشبة العشوائية والحاجز العاكس عند الصفر

$$r_0 > 0,\ p_0 > 0. \tag{6.13}$$

في الحالة (i) يلعب خصم بيتر للحصول على ثروة من بيتر وتتوقف اللعبة عندما تنفذ ثروة بيتر . في الحالة (ii) يسمح خصم بيتر لبيتر ان يستمر باللعبة حتى عند بقاء ثروته .

في الحالة (i) نقطة الصفر عبارة عن حالة ابادة . احتمال العبور الاول (الابادة) $f_{j,0}$ تمثل احتمال خسارة بيتر اذا علمت ان ثروته الابتدائية كانت j من المعادلة 6.9 فان $\{f_{j,0}, j = 0, 1, 2, \cdots\}$ تحقق نظام المعادلات

$$\begin{aligned} f_{j,0} &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{j,i}\, f_{i,0},\ j = 1, 2, \cdots \\ f_{0,0} &= 1. \end{aligned} \tag{6.14}$$

نفترض عندما $j \geq 1$ ان

$$p_{j,i} = \begin{cases} p_j > 0 & i = j + 1 \\ r_j \geq 0 & i = j \\ q_j > 0 & i = j - 1 \\ 0, & \text{ماعدا ذلك} \end{cases} \tag{6.15}$$

نكتب المعادلة 6.14 كما يلي :

$$f_{j,0} = q_j\, f_{j-1,0} + r_j\, f_{j,0} + p_j\, f_{j+1,0},\ j = 1, 2, 3, \cdots. \qquad (6.16)$$

نستطيع حل نظام المعادلات 6.16 بالتعاقب . بما ان $r_j = 1 - p_j - q_j,$

سنكتب المعادلة 6.16 كما يلي :

$$p_j(f_{j+1,0} - f_{j,0}) = q_j(f_{j,0} - f_{j-1,0}),\ j = 1, 2, \cdots. \qquad (6.17)$$

من المعادلة 6.17 نحصل على

$$f_{m+1,0} - f_{m,0} = \frac{q_m \cdots q_j}{p_m \cdots p_j}\,(f_{j,0} - f_{j-1,0}). \qquad (6.18)$$

لكل $m > j \geq 1$

دعنا نعرف $\rho_0 = 1$, $\rho_m = \frac{q_m \cdots q_1}{p_m \cdots p_1}$ (6.19)

عندما $m = 1, 2, \cdots$. في حالة $m = 0, 1, \cdots$ فان

$$f_{m+1,0} - f_{m,0} = \rho_m(f_{1,0} - 1). \qquad (6.20)$$

الان

$$f_{k+1,0} - 1 = \sum_{m=0}^{k} (f_{m+1,0} - f_{m,0}). \qquad (6.21)$$

وهكذا عندما $k = 0, 1, \cdots$ فان

$$f_{k+1,0} - 1 = (f_{1,0} - 1) \sum_{m=0}^{k} \rho_m. \qquad (6.22)$$

وهكذا نستطيع تحديد $f_{k,0}$ الى ان نصل الى الكمية الثابتة غير المحدودة $f_{1,0}$.

ندرس الان حالة اللعبة التي تتوقف عند وصول ثروة بيتركمية معلومة K تكتب ذلك بالرموز

$$q_K = 0,\ r_K = 1,\ p_K = 0 \qquad (6.23)$$

ان المشية العشوائية ستكون متسلسلة ماركوف المحدودة لفضاء الحالة $\{0, 1, \cdots, K\}$ بمصنوفة احتمال انتقالي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{K-1} & r_{K-1} & p_{K-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.24)$$

تحقق احتمالات الابادة $\{f_{j,0}, j = 0, 1, \cdots, K\}$ نظام المعادلات

$$f_{j,0} = \sum_{i=0}^{K} p_{j,i}\, f_{i,0}, j = 1, 2, \cdots, K-1 \qquad (6.25)$$

$$f_{0,0} = 1$$

$$f_{K,0} = 0.$$

بامكاننا ان نثبت صحة المعادلة 6.22 عندما $k = 0, 1, \cdots, K-1$ نستطيع ايجاد $f_{1,0}$ في حالة متسلسلة ماركوف المحدودة بدون صعوبة من المعادلة 6.22 عندما $k = K-1$ ومن حقيقة $f_{K,0} = 0$ نحصل على

$$-1 = (f_{1,0} - 1) \sum_{m=0}^{K-1} \rho_m.$$

اذن

$$f_{1,0} = 1 - \left\{\sum_{m=0}^{K-1} \rho_m\right\}^{-1} = \frac{\sum_{m=1}^{K-1} \rho_m}{\sum_{m=0}^{K-1} \rho_m}. \qquad (6.26)$$

من المعادلتين 6.26 ، 6.22 نحصل في حالة المشيات العشوائية ذات فضاء الحالة $\{0, 1, \cdots, K\}$ ومصفوفة الاحتمال الانتقالي 6.24 على ان احتمالات الابادة في حالة الصفر تحقق

$$1 - f_{j,0} = \frac{\sum_{m=0}^{j-1} \rho_m}{\sum_{m=0}^{K-1} \rho_m}, j = 1, 2, \cdots, K. \qquad (6.27)$$

من الممكن الحصول على $f_{j,0}$ في حالة المشيات العشوائية بفضاء حالة $\{0, 1, 2, \cdots\}$ ومصفوفة احتمال انتقالي 6.10 وذلك بايجاد غاية المعادلة 6.27 عندما تقترب K الى ∞

$$1-f_{j,0}=\frac{\sum_{m=0}^{j-1}\rho_m}{\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m}, j=1, 2, \cdots \tag{6.28}$$

اذا كان

$$\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m < \infty; \tag{6.29}$$

$$f_{j,0}=1 \quad \text{for} \quad j=1, 2, \cdots. \tag{6.30}$$

اذا كان

$$\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m=\infty. \tag{6.31}$$

برهان المعادلة 6.28. الدقيق وفقاً للمعادلة 6.29 خارج نطاق هذا الكتاب . راجع (1960) Chung من 69 نبرهن في المثال 6B ان المعادلتين 6.30 6.31 متكافئتان .

لاجل معرفة اهمية هذه النتائج . سنعتبر بالتفصيل اللعبة المعادة بحيث تتحقق المعادلة 6.11 ان

$$\rho_m=\left(\frac{q}{p}\right)^m. \tag{6.32}$$

في حالة وجود ثروة كلية لبيتر ولمناقشة تساوي K فانه من المعادلة 6.27 يكون احتمال خسارة بيتر اذا علمنا ان ثروته الابتدائية كانت j

لان

$$\begin{aligned} f_{j,0}&=1-\frac{1-(q/p)^j}{1-(q/p)^K}=\frac{(q/p)^j-(q/p)^K}{1-(q/p)^K} && \text{if} \quad p\neq q \qquad (6.32)\\ &=1-\frac{j}{K}=\frac{K-j}{K} && \text{if} \quad p=q \end{aligned}$$

حيث $j=1, 2, \cdots, K$)

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{j-1}(q/p)^m&=\frac{1-(q/p)^j}{1-(q/p)} && q\neq p \qquad (6.33)\\ &=j && q=p. \end{aligned}$$

عندما تقترب K الى ∞ نحصل من المعادلة 6.32 على

$$\begin{aligned} f_{j,0}&=\left(\frac{q}{p}\right)^j && \text{if} \quad p>q \qquad (6.34)\\ &=1 && \text{if} \quad p\leq q. \end{aligned}$$

يجب ملاحظة ان المعادلة 6.34 يمكن الحصول عليها من المعادلات 6.28- الى 6.31-

بعبارة اخرى يمكن صياغة المعادلة 6.31 كما يلي . اذا كانت اللعبة متساوية او ليستمن صالح بيتروكان منافس بيترذا ثروة هائلة فان خسارة بيترستكون بالتأكيد . اما اذا كانت اللعبة من صالح بيتر فان منافسه سيخسر اللعبة حتى ولوكانت ثروته هائلة .

المقامر في الكازينوسيكون في الموقف الاتي . ان هذا المقامريلعب لعبة ليست مـــن صالحه ضد منافس غني جداً يرغب باعادة اللعبة دائماً . بينما للمقامر حرية ترك اللعبة في أي وقت يشاء . اذا كان عند المقامر ثروة ابتدائية تساوي j قطعة نقود وتكون المراهنة لقطعة نقود واحدة في كل مرة وان المراهنة يلعب الى ان يخسر جميع ثروته اوزيادة ثروته بمقدار j ــ R قطعة نقود . ان احتمال خسارته $f_{j,0}$ مبينة في المعادلة 6.32 حيـــث p تمثل احتمال ربح المقامر في كل مرة تعاد اللعبة .

نلاحظ ان ربح المتوقع من الستراتيجية الموصوفة اعلاه سالب حتى ولوكان احتمال زيادة ثروته الى K موجبوقبل ان يخسرنتيجة اللعبة . ربحه المتوقع G تساوي $K - j$ باحتمال $1 - f_{j,0}$ وانها تساوي $-j$ باحتمال $f_{j,0}$.وهكذا فان النتيجة المتوقعة .

$$E[G] = (K - j)(1 - f_{j,0}) - j\, f_{j,0} = K\,(1 - f_{j,0}) - j, \qquad (6.35)$$

والتي ستكون سالبة اذا كان $p < q$

احتمال خسارة المقامر في مختلف المواقف المثالية مبينة في الجدول 6.4.

جدول 6.4. نهاية المقامر

الثروة الابتدائية j	الثروة المطلوبة K	احتمال الربح في كل مرحلة p	احتمال الخسارة	متوسط النتيجة	متوسط مدة اللعبة
9	10	.50	0.1	0	9
9	10	45	0.21	− 1.1	11
99	100	.45	0.182	− 17.2	171.8
90	100	.50	0.1	0	900
90	100	.45	0.866	− 76.6	756.6
90	100	.40	0.983	− 88.3	441.3

ننصح القاريء بمراجعة كتاب Feller (1957) ص 315 الى 317 لمعرفـــة تأثير المراهنات على احتمالات الخسارة . يمكن ان نثبت تناقص احتمال الخسارة بزيادة مدة المباراة .

متسلسلات ماركوف المعاودة واللامعاودة التي لايمكن اختزالها :

تعرف متسلسلة ماركوف بمتسلسلة لايمكن اختزالها *irreducible* اذا كانت جميع ازواج حالات المتسلسلة تبادلية بحيث تتكون المتسلسلة من فئة تبادلية واحدة فقط . نستطيع دراسة الفئة التبادلية المغلقة وكانها متسلسلة ماركوف غير المختزلة . تعرف المتسلسلة غير المختزلة بانها معاودة (اولامعاودة) اذا كانت كل حالة في المتسلسلة معاودة (او لامعاودة) —

نستخدم النظرية 6B للحصول على معيار لمعاودة او غير معاودة متسلسلة ماركوف غير المختزلة .

نظرية 6C

تكون متسلسلة ماركوف غير المختزلة ذات فضاء حالة C غير معاودة اذا وجدت حالة k تنتمي الى C بحيث يكون لنظام المعادلات

$$v_j = \sum_{i \neq k \text{ حالات}} p_{j,i}\, v_i \quad \text{لجميع حالات } j \neq k,$$

حلاً محدوداً $\{v_j\}$ لايساوي صفراً بالتماثل .

البرهان :

نفترض من اجل تسهيل عملية الكتابة ان حالات C هي $\{0, 1, 2, \cdots\}$ وان الحالة التـي تم اختيارها هي الحالة $k = 0$ من النظرية 5C تكون معاودة اذا كانت $f_{j,0} = 1$, $j = 1, 2, \cdots,$ والعكس صحيح . تأمل الان متسلسلة جديدة لماركوف ولتكن C' بنفس فضاء حالة $\{0,1,\cdots\}$ وان العلاقة بين مصفوفة الاحتمال الانتقالي p' ومصفوفة الاحتمال الانتقالي p كمايلي :

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

بعبارة اخرى . يتم تحوير متسلسلة ماركوف الاصلية الى متسلسلة جديدة يكون الصفر حالة ابادة وتكون بقية الحالات $\{1, 2, \cdots\}$ غير معادة لاننا افترضنا عدم امكانية

افترضنا عدم امكانية اختزال المتسلسلة الاصلية . فضلاً عن ذلك $f_{j,0}$ تمثل احتمال الابادة في صفر البادئة في j, ان $1 - f_{j,0}$ عبارة عن احتمال بقاء المتسلسلة C' بصورة غير محدودة بين الحالات اللامعاودة $\{1, 2, \cdots\}$ البادئة في j من النظرية 6B يكون الشرط اللازم والضروري لكون $1 - f_{j,0} > 0$ هووجود حل محدود للمعادلــة 6.36 وان هذا لحل لايساوي صفراً بالتماثل . من جانب ثان تكون المتسلسلة الاصلية C غير معاودة اذا كانت $1 - f_{j,0} > 0$ لبعض قيم j والعكس صحيح وهو المطلوب اثباته .

مثال 6B

المشيات العشوائية المعاودة واللامعاودة :

تأمل المشيــة العشوائيــة العامــة ذات فضاء الحالة $\{0, 1, 2, \cdots\}$ ومصفوفة الاحتمال الانتقالي 6.10 التي تحقق المعادلتين 6.13 ، 6.15 بحيث لاتوجد حالــة ابادة . ان المشية العشوائية ستكون عبارة عن متسلسلة غير مختزلة من النظرية 6C تكون المشية العشوائية غير معاودة اذا كان لنظام المعادلات

$$v_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{j,i}\, v_i,\ j = 1, 2, \cdots \qquad (6.38)$$

حل محدود لايساوي صفرا بالتماثل والعكس صحيح . نكتب المعادلة 6.38 على ضوء المعادلة 6.15 على الشكل الاتي :

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1 v_1 + p_1 v_2 \\ v_j &= q_j v_{j-1} + r_j v_j + p_j v_{j+1},\ j = 2, 3, \cdots . \end{aligned} \qquad (6.39)$$

نستخدم 6.39 لكتابة المعادلة الثانية على الشكل الاتي :

$$p_j(v_{j+1} - v_j) = q_j(v_j - v_{j-1}),\ j = 2, 3, \cdots . \qquad (6.40)$$

ونتيجة لذلك كما في المشية العشوائية 6.22 عندما $k = 2, \ldots$ فان

$$v_{k+1} - v_1 = (v_2 - v_1)\left(1 + \sum_{m=2}^{k} \left\{\frac{q_m \cdots q_2}{p_m \cdots p_2}\right\}\right) . \qquad (6.41)$$

نحصل من المعادلة الاولى في 6.39 على

$$v_2 - v_1 = \frac{q_1}{p_1} v_1 . \qquad (6.42)$$

نكتب الحل العام $\{v_k, k=1,2,\cdots\}$ لنظام المعادلات 6.38 باستخدام المعادلتين 6.41 ، 6.42 وذلك بدلالة الكمية الثانية غير المحددة v_1

$$v_k = v_1 \sum_{m=0}^{k-1} \rho_m, \quad k=1,2,\cdots, \tag{6.43}$$

حيث ρ_m تعرف بالمعادلة 6.19 . يكون التتابع $\{v_k\}$ محدوداً اذا تحققت صحة المعادلة 6.29 والعكس صحيح . نتيجة لذلك فان المعادلة 6.29 عبارة عن شرط لازم وضروري لكي تكون المشية العشوائية غيرمعاودة . وبنفس الطريقة فان المعادلة 6.31 عبارة عن الشرط اللازم والضروري لكون المشية العشوائية العامة معاودة .

التماريـــــن :

اوجد في التمارين 6.1 الى 6.6 احتمالات الابادة عند الصفر لمتسلسلة ماركوف المذكورة في التمرين ذي العلاقة (اوجد $f_{i,0}$)

6.1 تأمل المشية العشوائية عند النقاط $\{0,1,\cdots,K\}$ وان

$k=1,2,\cdots,K-1 \qquad r_0=r_K=1$

(i) $p_k = q_k = 0.5$;
(ii) $p_k = 0.4,\ q_k = 0.6$;
(iii) $p_k = 0.4,\ p_k = 0.4,\ r_k = 0.2$.

6.2 افرض المشية العشوائية عند النقاط $\{0,1,\cdots\}$ حيث

$r_k = r \ ,\ q_k = q \ ,\ p_k = p \ ,\ r_0 = 1, r_K = 1$

لقيم الاخرى p, q, r كميات ثابتة موجبة حاصل جمعها يســـــاوي 1

6.3 تأمل المشية العشوائية عند النقاط $\{0,1,\cdots\}$ حيث $p_k = p > 0\ ,\ r_0 = 1$
$q_k = 1-p$ عندما $k \geq 2$ وان حيث $0 < \delta < 1$

$p_1 = p \quad q_1 = (1-\delta)(1-p), r_1 = \delta(1-p)$

(تعود هذه المشية الى نظام المراهنات الاتي : اذا كانت ثروة بيتر وحدة ، واحدة وفقدها فانه باحتمال δ سيستمر بالمراهنة) .

6.4 لتكن $\bar{X}_n$ عبارة عن موقع الجزيئة بعد n خطوة حيث تكون حركة الجزيئة بين الاعداد الصحيحة $\{0,1,2,\cdots\}$ حسب القواعد الاتية : تتحرك الجزيئة في كل خطوة وحدتين الى جهة اليمين اووحدة واحدة الى جهة اليسار باحتمالين p $1-p$ على الترتيب اذا وصلت الجزيئة نقطة صفر فانها ستبقى في تلك النقطة .

6.5 تأمل العملية الفرعية المذكورة في المثال 2C نفرض ان X_n عبارة عن حجم الجيل النوني .

6.6 افرض وجود تتابع من الرميات المستقلة لقطعة نقود تظهر صورتها باحتمال p نعرف تتابع المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \cdots$ كما يلي :
عندما $n \geq 1$, فان $X_n = k$ اذا كانت نتيجة المحاولة$(n-k)$كتابة وان نتيجة المحاولات$(n-k+1), (n-k+2) \cdots n$ صورة. بعبارة اخرى X_n طول عدد النجاحات في زمن المحاولة n. بصورة خاصة $X_n = 0$ اذا كانت نتيجة المحاولة n كتابة .

تلميح : $\{X_n\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف بمصفوفة احتمال انتقالي

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

6.7 تأمل متسلسلة ماركوف المعرفة مصفوفة احتمالها الانتقالي p بدلالة التتابع $\{q_0, q_1, \cdots\}$ كما يلي : عندما $k = 0, 1, 2, \cdots$ فان $p_{k,0} = q_k$
$p_{k,k+1} = 1 - q_k$ برهن ان متسلسلة ماركوف غير معاودة اذا كان $\sum_{k=0}^{\infty} q_k < \infty$ والعكس صحيح

تلميح : استخدم الحقيقة التالية اذا كانت $0 < q_k < 1$ فان

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=0}^{n} (1 - q_k) = 0$$

اذا كان $\sum_{k=0}^{\infty} q_k = \infty$ والعكس صحيح والتي يمكن برهنتها باستخدام المتباينة

$$1 - \sum_{k=m}^{n} q_k < \prod_{k=m}^{n} (1 - q_k) < \exp[-\sum_{k=m}^{n} q_k].$$

6.7 متوسط الابادة : العبور الاول . وازمنة العودة :

نفرض وجود متسلسلة لماركوف في فضاء حالة S ونفرض ان T تمثل مجموعة حالات غير معاودة في المتسلسلة . نحدد الان قانون الاحتمال المتغير العشوائي N الذي يسمى الزمن قبل الابادة *time before absorption* والذي يمثل طول المدة الزمنية التي تقضيها المتسلسلة بين الحالات غير المعاودة قبل ابادتها . نوضح ذلك بالرموز

$$N' = \sum_{j \in T} N_j(\infty). \tag{7.1}$$

نرمز للزمن الى ان تحصل الابادة بالرمز N ويكون كما يلي

$$N = N' + 1. \tag{7.2}$$

(7.3) نعرف $m_j = E[N \mid X_0 = j] = 1 + E[N' \mid X_0 = j]$

بانه متوسط الزمن للابادة

اذا اعطيت ان بداية المتسلسلة كانت في الحالة j نعرف بصورة عامة عندما $r \geq 0$

$$m_j^{(r)} = E[N^r \mid X_0 = j] \tag{7.4}$$

بانه عبارة عن العزم الرائي للزمن الى ان تحصل الابادة

نعبرعن m_j بدلالة الاحتمالات الانتقالية : لجميع قيم j العائدة الى T

$$\begin{aligned} m_j &= 1 + \sum_{i \in T} \sum_{n=1} p_{j,i}(n) \\ &= \sum_{i \in T} n_{j,i} \end{aligned} \tag{7.5}$$

نعرف $n_{j,i}$ لكل حالتين i ، j عائدتين الى T كما يلي :

$$n_{j,i} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{j,i}(n). \tag{7.6}$$

البرهان :

نحصل من المعادلتين 7.1 ، 7.2 على

$$m_j = 1 + \sum_{i \in T} E[N_i(\infty) \mid X_0 = j].$$

نستطيع ببساطة ان نحقق ان .

$$E[N_i(\infty) \mid X_0 = j] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{j,i}(n).$$

من المناسب ان نحصل على متوسط ازمنة الابادة $\{m_j, j \in T\}$ كحل لنظام المعادلات الخطية :

$$m_j = 1 + \sum_{k \in T} p_{j,k}\, m_k, \ j \in T. \tag{7.7}$$

نبرهن ان m_j تحقق 7.7 اما عن طريق استخدام المعادلة 7.5 او البرهنة على الشكل الاتي :

$$\begin{aligned} m_j = E[N \mid X_0 = j] &= \sum_{k \in S} p_{j,k}\, E[N \mid X_1 = k] \\ &= \sum_{k \in T} p_{j,k}\{1 + E[N \mid X_0 = k]\} + \sum_{k \in T^c} p_{j,k} \\ &= 1 + \sum_{k \in T} p_{j,k}\, m_k. \end{aligned} \tag{7.8}$$

يكون متوسط الازمنة الى الابادة محدوداً في حالة متسلسلة ماركوف وان لنظام المعادلات 7.7 حلاً وحيداً . اما في حالة متسلسلة ماركوف ذات العدد غير المحدود من الحالات غير المعاودة فان متوسط الازمنة الى الامتصاص قد يكون محدوداً . على كل حال ان نثبت اذا كانت الازمنة الى الامتصاص محدودة وباحتمال واحد (أي بالتأكيد عدم وجود المتسلسلة بصورة نهائية في T فان متوسط ازمنة الابادة عبارة عن حل وحيد لنظام المعادلات 7.7.

مثال 7A

المدة الزمنية للمشيات العشوائية :

افترض وجود لاعبين هما بيتر وخصمه في كل لعبة . يربح بيتر باحتمال p نفترض ان ثروة بيتر الابتدائية تساوي j, وان الثروة الكلية لبيتر وخصمه تساوي K نفرض ان X_n تمثل ثروة بيتر بعد n لعبة .ان $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ عبارة عن مشية عشوائية ذات فضاء حالة $\{0, 1, \cdots, K\}$ ومصفوفة الاحتمال الانتقالي 6.24. في متسلسلة ماركوف هذه ، تكون حالات $1, 2, \cdots, K-1$ حالات غير معاودة بينما تكون الحالتين صفراً ، K حالتي ابادة . ان المدة الزمنية N للابادة تمثل المدة الزمنية للمراهنة ،أي N عدد مرات اعادة اللعبة الى ان يفقد احد اللاعبين ثروته كلها (نفاذ ثروته) . متوسط زمن الابادة $m_j = E[N \mid X_0 = j]$ تمثل متوسطا للمدة الزمنية للمراهنة اذا علمت ان ثروة بيتر الابتدائية تساوي j. متوسط ازمنة الابادة $\{m_j, j = 1, 2, \cdots, K-1\}$ عبارة عن الحل الوحيد لنظام المعادلات

$$m_j = 1 + \sum_{k=1}^{K-1} p_{j,k}\, m_k, \; j = 1, \cdots, K-1. \tag{7.9}$$

اذا عرفنا $m_0 = m_K = 0,$ فاننا باستخدام المعادلة 6.24 سنكتب المعادلة 7.9 كما يلي :

$$m_j = 1 + q_j m_{j-1} + r_j m_j + p_j m_{j+1}, j = 1, \cdots, K-1. \quad (7.10)$$

اونكتب المعادلة 7.10 على شكل معادلة الفرق حتى الدرجة الاولى

$$p_j M_{j+1} = q_j M_j - 1, \quad j = 1, 2, \cdots, K-1, \quad (7.11)$$

حيث

$$M_j = m_j - m_{j-1}, \; j = 1, 2, \cdots, K. \quad (7.12)$$

نحصل عند حل المعادلة 7.11 تعاقبيا على

$$\begin{aligned} M_{j+1} = {} & \frac{q_j}{p_j}\frac{q_{j-1}}{p_{j-1}}\cdots\frac{q_{j-m}}{p_{j-m}} M_{j-m} \\ & - \frac{1}{p_j}\left(1 + \frac{q_j}{p_{j-1}} + \cdots + \frac{q_j \cdots q_{j-m+1}}{p_{j-1} \cdots p_{j-m}}\right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

نحصل على صيغة لـ m_j من المعادلتين 7.12 ، 7.13 نوضح ذلك في حالة المحاولات المعادة . عندما $j = 1, 2, \cdots, K-1,$ فان

$$\begin{aligned} M_{j+1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^j M_1 - \frac{1}{p}\left\{1 + \frac{q}{p} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{j-1}\right\} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^j M_1 - \left(\frac{1}{p-q}\right)\left\{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^j\right\} \quad \text{if} \quad q \neq p \\ &= M_1 - \frac{1}{p} j \qquad\qquad \text{if} \quad p = q. \end{aligned} \quad (7.14)$$

الان عندما $k = 1, 2, \cdots, K$ فان

$$\begin{aligned} m_k = m_k - m_0 &= \sum_{j=0}^{k-1} M_{j+1} \\ &= kM_1 - k(k-1)\left(\frac{1}{2p}\right) \qquad \text{if} \quad p = q \\ &= \left\{M_1 + \left(\frac{1}{p-q}\right)\right\} \frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)} - \frac{k}{p-q} \quad \text{if} \quad p \neq q. \end{aligned} \quad (7.15)$$

اذن نحصل على $\{m_k, k = 1, 2, \cdots, K\}$ في المعادلة 7.15 بدلالة الكمية الثابتة غير المحددة M_1 . نستخرج M_1 عندما $m_K = 0$ وهكذا اذا كانت $p = q,$ فـــان

$$0 = m_K = K M_1 - K(K-1)\left(\frac{1}{2p}\right),$$

بحيث $M_1 = (K-1)/2p$ اذا كانت $p = q$. نحصل الان على متوسط الزمن الىالابادة اذا بدات عند $k,$ وكما يلي

$$m_k = \frac{k(K-k)}{2p} \qquad \text{if} \quad p = q$$
$$= \frac{k}{q-p} - \frac{K}{q-p} \frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^K} \quad \text{if} \quad p \neq q. \tag{7.16}$$

اذا اقتربت K الى ∞ في المعادلة 7.16 نحصل على متوسط الزمن للابادة عند النقطة صفر في المشبة العشوائية عند النقاط $\{0, 1, \cdots\}$:

$$m_k = \frac{k}{q-p} \quad \text{if} \quad q > p$$
$$= \infty \qquad \text{if} \quad q \le p. \tag{7.17}$$

صياغة مصفوفي معادلات متوسط زمن الامتصاص في حالة متسلسلات ماركوف المحدودة :

متسلسلة ماركوف المحدودة بفضاء حالة S ولتكن T عبارة عن مجموعة حالات غيرمعاودة . لتكن Q عبارة عن المصفوفة

$$Q = \{p_{j,k} : j, k \in T\} \tag{7.18}$$

الاحتمالات الانتقالية لحالات تنتمي الى T الى حالات اخرى تنتمي الى T لتكن m عبارة عن عمود متجه له مركبات $m_j, j \in T$. نكتب نظام المعادلات 7.7 على شكل مصفوفة

$$Im = 1 + Q\, m, \tag{7.19}$$

حيث 1 عبارة عن عمود متجه كل من مركباته تساوي 1 وان I عبارة عن وحده المصفوفة . يمكننا اعادة كتابة معادلة 7.19 كما يلي :

$$(I - Q)\; m = 1. \tag{7.20}$$

نفرض ان N عبارة عن نظير المصفوفة $I - Q$:

$$N = (I - Q)^{-1}. \tag{7.21}$$

يمكننا التحقق من وجود نظير للمصفوفة $I - Q$ في الحقيقة

$$(I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + \cdots + Q^n + \cdots. \tag{7.22}$$

لكي نبرهن صحة المعادلة 7.22 نبرهن ان المصفوفة المعرفة متوالية محدودة التقارب ولها خاصية انها اذا ضربت بالمقدار $I - Q$ فحاصل الضرب يكون I .

يمكن ان نكتب الان المتجه m لمتوسط ازمنة الامتصاص بدلالة N . من المعادلة 7.20 نكتب

$$m = N\,1. \tag{7.23}$$

اطلق (Kemeny and Snell (1960 على N اسم المصفوفة الاساسية لمتسلسلة ماركوف المبيدة واثبتنا وجود عدد من الكميات المهمة بالاضافة الى متوسط ازمنة الابادة يمكن التعبير عنها بدلالة N (راجع المكملة 7A) .

مثـال 7B

تأمل المشية العشوائية عند الاعداد الصحيحة $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ذات مصفوفة الاحتمال الانتقالية

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Then ان

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{bmatrix},$$

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & -p & 0 \\ -q & 1 & -p \\ 0 & -q & 1 \end{bmatrix}.$$

اذا احتسبنا النظر $(I - Q)^{-1}$ نحصل على

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p + q^2}{p^2 + q^2} & \frac{p}{p^2 + q^2} & \frac{p^2}{p^2 + q^2} \\ \frac{q}{p^2 + q^2} & \frac{1}{p^2 + q^2} & \frac{p}{p^2 + q^2} \\ \frac{q^2}{n^2 + q^2} & \frac{q}{p^2 + q^2} & \frac{q + p^2}{p^2 + q^2} \end{bmatrix}$$

بصورة خاصة اذا كانت $p = 2/3,$ فان

$$N = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}, \quad m = \begin{bmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{18}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}.$$

ازمنة العودة والعبور الاول :

تأمل متسلسلة ماركوف المعاودة التي لايمكن اختزالها مع فضاء حالة C . لكل زوج من الحالات j , k المنتمية الى C فان تابع احتمالات العبور الاول $\{f_{j,k}(n), n = 1, 2, \cdots\}$ عبارة عن توزيع احتمالي يسمى المتوسط

$$m_{j,k} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{j,k}(n) \tag{7.24}$$

بمتوسط زمن العبور الاول من j الى k في حالة $j \neq k$ ويسمى متوسط زمن المعاودة للحالة k اذا كانت $j = k$

يعتبر متوسط ازمنة العبور الاول $\{m_{j,k}, j \neq k\}$ اذا اعطيت الحالة الثانية k, بانه متوسط أزمنة الابادة لمتسلسلة ماركوف الجديدة الناتجة من متسلسلة ماركوف الاصلية وذلك بتكوين k حالة من حالات الابادة (لمعرفة كيفية الحصول على ذلك ، راجع برهان النظرية 6C) بصورة دقيقة اذا كانت $P = \{p_{j,k}\}$ عبارة عن مصفوفة الاحتمال الانتقالي لمتسلسلة ماركوف الاصلية ، تعرف مصفوفة احتمال انتقالي جديدة كمايلي :

$$p'_{i,j} = 1 \quad \text{if} \quad i = k, j = k$$
$$p'_{i,j} = 0 \quad \text{if} \quad i = k, j \neq k$$
$$p'_{i,j} = p_{i,j} \quad \text{if} \quad i \neq k, j \quad \text{اية حالة}$$

ان متسلسلة ماركوف الناتجة تحتوي على حالة ابادة مفردة k, بينما جميع الحالات الاخرى تكون غير معاودة لانها غير اساسية . ان طبيعة متسلسلة ماركوف الجديدة قبل الابادة هي نفس طبيعة متسلسلة ماركوف الاصلية قبل المرور بحالة k لاول مرة . بصورة خاصة متوسط زمن العبور الاول من j الى k في متسلسلة ماركوف الاصلية هو نفس متوسط الزمن للابادة في المتسلسلة الجديدة من المعادلة 7.7 نحصل على النظرية التالية :

نظرية 7A

لتكن C عبارة عن متسلسلة ماركوف المعاودة غير المختزلة . لتكن k عبارة عن حالة ثابتة تنتمي الى C . مجموعة متوسط ازمنة العبور الاول $\{m_{j,k}, j \neq k\}$ تحقق نظام المعادلات الخطية

$$m_{j,k} = 1 + \sum_{i \neq k} p_{j,i} m_{i,k}, \quad j \neq k. \tag{7.25}$$

ان للنظام 7.25 حلاً وحيداً .

هناك طريقتان لحساب متوسط ازمنة المعاودة لمتسلسلة ماركوف المعاودة التي لايمكن اختزالها متوسط ازمنة المعاودة يمكن الحصول عليها من متوسط ازمنة العبور الاول :

$$m_{k,k} = 1 + \sum_{i \neq k} p_{k,i}\, m_{i,k}, \;\; k \in C, \qquad (7.26)$$

لان

$$m_{k,k} = p_{k,k} + \sum_{i \neq k} p_{k,i}\, \{1 + m_{i,k}\}.$$

الطريقة الثانية موضحة في المعادلة 8.35.

مثال 7C

متوسط ازمنة العبور الاول فة المشية العشوائية :

تأمل المشبة العشوائية عند الاعداد الصحيحة $\{0, 1, 2, \cdots\}$ بمصفوفه احتمال انتقالي (حيث تكون $p > 0$ $(q = 1 - p)$

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad (7.27)$$

من الواضح ان المتسلسلة الماركوفية ذات مصفوفة الاحتمال الانتقالي P التي لايمكن اختزالها (جميع الحالات تبادلية) وتكون معاودة اذا كانت $q \geq p$ والعكس صحيح (للحصول على البرهان راجع مثال 6C) للحصول على متوسط ازمنة العبور الاول $\{m_{j,k}, j \neq k\}$ نستخدم معادلة 7.25

نستطيع الحصول على النتائج بالتحوير المناسب لنتائج المثال 7A اعتبر المشبة العشوائية عند الاعداد الصحيحة $\{0, 1, \cdots, K\}$ بمصفوفة احتمال انتقالي

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

بحيث ستكون K عبارة عن حالة ابادة يمكن اثبات متوسط زمن الابـــــادة m_j من حالة j الى حالة K لهذه المشية العشوائية هو

$$m_j = \frac{q}{(q-p)^2}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^K - \left(\frac{q}{p}\right)^j\right\} - \left(\frac{K-j}{q-p}\right). \qquad (7.28)$$

نستنتج من المعادلة 7.28 عندما $j < k$ ان متوسط ازمنة العبور الاول $m_{j,k}$ للمشية العشوائية 7.27 يكون كما يلي :

$$m_{j,k} = \frac{q}{(q-p)^2}\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^j\right\} - \frac{k-j}{q-p} \quad \text{if} \quad j < k. \qquad (7.29)$$

لايجاد $m_{j,k}$ عندما $j > k$ نستخدم المعادلة 7.17 نستنتج ان

$$\begin{aligned} m_{j,k} &= \frac{j-k}{q-p} \quad \text{if} \quad k < j \quad \text{and} \quad q > p \\ &= \infty \qquad \text{if} \quad k < j \quad \text{and} \quad q = p. \end{aligned} \qquad (7.30)$$

نحصل على متوسط ازمنة المعاودة من متوسط الازمنة للعبور الاول وذلك من المعادلة 7.26. عندما $k > 0,$

$$\begin{aligned} m_{k,k} &= 1 + q\, m_{k-1,k} + p\, m_{k+1,k} \\ &= \frac{q}{q-p}\left(\frac{q}{p}\right)^k \quad \text{if} \quad q > p \\ &= \infty \qquad \text{if} \quad q = p, \end{aligned} \qquad (7.31)$$

بينما

$$\begin{aligned} m_{0,0} &= 1 + p\, m_{1,0} \\ &= \frac{q}{q-p} \quad \text{if} \quad q > p \\ &= \infty \qquad \text{if} \quad q = p. \end{aligned} \qquad (7.32)$$

الحالات المعاودة الخالية والموجبة :

تكون للحالة المعاودة k خاصية عودة متسلسلة ماركوف في النهاية الى k. مـــن الممكن ان يكون متوسط زمن العودة الى k غير محدود . مثلاً في المشيات العشوائيـــــة المتناظرة عند النقاط $\{0, 1, 2, \cdots\}$ تكون جميع الحالات تبادلية .

نعرف الحالة المعاودة k بالحالة الموجبة اذا كان متوسط زمن العودة $m_{k,k}$ محدداً ونعرف الحالة المعاودة k بالحالة الخالية اذا كان متوسط زمن العودة غير محدود .

مثال 7D

المشيات العشوائية المعاودة الموجبة :

تكون المشية العشوائية المبينة مصفوفة احتمالها الانتقالي في المعادلة 7.27 معاودة اذا كانت $q \geq p$ والعكس صحيح . وهكذا ستكون معاودة موجبة اذا كانت $q > p$ والعكس صحيح .

نوضح في البند القادم ان الحالة المعادة الموجبة تكون لها خاصية الفئة بالمعنى الاتي اذا كانت C فئة تبادلية للحالات المعاودة فان جميع الحالات في C تكون موجبة او جميع الحالات في C تكون خالية .

تعرف متسلسلة ماركوف غير المختزلة بالمتسلسلة المعاودة الموجبة اذا كانت جميع حالاتها موجبة معاودة . يعرف معظم الكتاب متسلسلة ماركوف المعاودة الموجبة غير المختزلة بالمتسلسلة الماركوفية الارجودكية *ergodic*

دوال الخاصية والعزوم العالية للزمن الى الابادة :

لكي نحصل على تباين وعزوم عليا للزمن N الى الابادة لمتسلسلة ماركوف فاننا نحصل على مجموعة معادلات خطية تحققها هذه العزوم دالة الخاصية الشرطية للزمن N الى الابادة . اذا علمت ان المتسلسلة الماركوفية قد بدات في حالة j، غير المعاودة تعرف كما يلي (نفرض ان $i = \sqrt{-1}$)

$$\varphi_j(u) = E[e^{iuN} \mid X_0 = j],\ j \in T. \tag{7.33}$$

تحقق المعادلات

$$e^{-iu}\varphi_j(u) = 1 + \sum_{k \in T} p_{j,k}\,\{\varphi_k(u) - 1\},\ j \in T, \tag{7.34}$$

لان

$$\begin{aligned}\varphi_j(u) &= \sum_{k \in C} p_{j,k}\, E[e^{iuN} \mid X_1 = k] \\ &= \sum_{k \in T^c} p_{j,k}\, e^{iu} + \sum_{k \in T} p_{j,k}\,\{e^{iu}\varphi_k(u)\}.\end{aligned}$$

باشتقاق المعادلة 7.34 نسبة الى u نحصل على

$$e^{-iu}\{\varphi_j'(u) - i\,\varphi_j(u)\} = \sum_{k \in T} p_{j,k}\,\varphi_k'(u). \tag{7.35}$$

نحصل عندما $u = 0$ في المعادلة 7.35, على

$$i^2 m_j - i = i \sum_{k \in T} p_{j,k}\, m_k,$$

والتي تؤدي للحصول على المعادلة 7.7.

نشتق المعادلة 7.35 نسبة الى u فنحصل على

$$e^{-iu}\{\varphi_j''(u) - 2\,i\,\varphi_j'(u) - \varphi_j(u)\} = \sum_{k \in T} p_{j,k}\,\varphi_k''(u). \qquad (7.36)$$

نفرض $u = 0$ في المعادلة 7.36 فنحصل على نظام من المعادلات الخطية بعزوم ثانية $m_j^{(2)}$ للزمن الى ان تحصل الابادة

$$m_j^{(2)} = 2m_j - 1 + \sum_{k \in T} p_{j,k}\, m_k^{(2)},\ j \in T. \qquad (7.37)$$

بنفس طريقة اشتقاق المعادلة 7.25 من المعادلة 7.7 يمكن ان نستخرج من المعادلة 7.37 نظاماً من المعادلات الخطية بعزوم ثانية

$$m_{j,k}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_{j,k}(n) \qquad (7.38)$$

لازمنة العبور الاول لمتسلسلة ماركوف المعاودة التي لا يمكن اختزالها :

$$m_{j,k}^{(2)} = 2m_{j,k} - 1 + \sum_{i \neq k} p_{j,i}\, m_{i,k}^{(2)},\ j \neq k. \qquad (7.39)$$

المكملات :

7A استعمالات المصفوفة الاساسية لمتسلسلة الابادة المحدودة :

اعتبر متسلسلة ماركون المحدودة . ولتكن T عبارة عن مجموعة الحالات اللامعاودة افترض ان جميع الحالات المعاودة تكون حالات ابادة . ان مصفوفة الاحتمال الانتقالي P يمكن ان نكتب كما يلي

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

حيث ان Q معرفة بالمعادلة 7.18, I عبارة عن وحدة المصفوفة وان R عبارة عن مصفوفة الاحتمال الانتقالية (rec- tangular) من الحالات اللامعاودة الى حالات الابادة . لتكن $F = \{f_{j,k}\}$ حيث $f_{j,k}$ عبارة عن احتمال الابادة من الحالة اللامعادة

الى الحالة j المعاودة k . لتكن $m^{(2)} = \{m_j^{(2)}\}$ حيث $m_j^{(2)}$ عبارة عن العزوم الثاني لزمن الابادة من j الى مجموعة الحالات المعاودة اثبـــت ان

$$\bar{F} = NR,$$
$$m^{(2)} = N(2m - 1).$$

المطلوب ايجاد F و $m^{(2)}$ لمصفوفة الاحتمال الانتقالي المبينة فـي المثـال 7B

7B ـ S مجموعة حالات متسلسلة ماركوف . T مجموعة الحالات اللامعاودة في المتسلسلة لتكن $\{b_j, j \in T\}$ مجموعة من الكميات الثابتة المعلومة $\{v_j, j \in T\}$ مجموعة من المتغيرات تحقق المعادلات الاتية :

$$v_j = b_j + \sum_{i \in T} p_{j,i}\, v_i, \qquad j \in T.$$

اثبت ان

$$v_j = \sum_{i \in T} n_{j,i}\, b_i, \qquad j \in T,$$

حيث $n_{j,i}$ معرفة بالمعادلة 7.6 .

التماريـــــن :

7.1 افرض وجود متسلسلة لماركوف كما معرفة في المثال 2.8.

(i) اوجد متوسط عدد الايام العاطلة فيها الماكنة

(ii) اذا كانت كلا الماكنتين في حالة صالحة للعمل في نهاية يوم ما . فما هو متوسط عدد الايام قبل اليوم الاول الذي تكون فيه جميع المكائن عاطلة

البند 8-6 التوزيعات الثابتة والتوزيعات الطويلة الاجل :

اذا كانت k حالة غير معاودة فان لاي حالة j

$$\underset{n \to \infty}{\text{غـــا}}\; p_{j,k}(n) = 0, \tag{8.1}$$

لان

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n) < \infty. \tag{8.2}$$

اما اذا كانت k حالة معاودة فان المشكلة تكون اكثر تعقيداً بصورة عامة للاحتمالات الانتقالية $\{p_{j,k}(n), n = 1, 2, \cdots\}$ غاية في متوسط سيـارو Cesàro كما مبين في الصيغة ادناه :

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـــا}} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p_{j,k}(m) = f_{j,k}\frac{1}{m_{k,k}}; \tag{8.3}$$

$f_{j,k}$ عبارة عن احتمال العبور الاول من حالة j الى حالة k ، $m_{k,k}$ عبارة عن موسط زمن عودة k اذا كانت $m_{k,k}$ غيرغير محدودة فان $1/m_{k,k}$ تساوي صفراً .

لبرهنة المعادلة 8.3 يجب ان نبرهن اذا كانت k حالة معاودة فان .

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـــا}} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p_{k,k}(n) = \frac{1}{m_{k,k}}. \tag{8.4}$$

على ضوء المكملة 4D نجد ان المعادلة 8.3 عبارة عن نتيجة للمعادلة .8.4. وبنفس الطريقة تثبت تحقيق الغاية في المعادلة 8.4 اي ان

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـــا}} p_{k,k}(n) = \frac{1}{m_{k,k}} \tag{8.5}$$

نحصل من المكملة 4C على ان المعادلة 8.3 تعني

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـــا}} p_{j,k}(n) = f_{j,k}\frac{1}{m_{k,k}}. \tag{8.6}$$

نوضح البرهان التحليلي للمعادلة 8.4 نفس النظرية 4H نذكر الشروط التي تحقق المعادلة 8.5 ادناه .يناقش البرهانيين الاحتماليين للمعادلتين 8.4 - 8.5 في البندين 6-10, 6-9 على الترتيب . ندرس نتائجهما في هذا البند تعرف متسلسلة ماركوف ذات فضاء الحالة C بالمتسلسلة ذات التوزيع طويل الاجل اذا وجد توزيع احتمالي $\{\pi_k, k \in C\}$ ذو الخاصية التالية : كل من j ، k عائدتان الى C فان

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـــا}} p_{j,k}(n) = \pi_k. \tag{8.7}$$

الابتدائي غير المشروط $\{p_k(0), k \in C\}$ فان الاحتمال غير المشروط $p_k(n)$ يقترب الى π_k عندما تقترب n الى ∞ .

$$\begin{aligned}\underset{n\to\infty}{\text{غـــا}} p_k(n) &= \underset{n\to\infty}{\text{غـــا}}\sum_{j\in C} p_j(0)\, p_{j,k}(n) \\ &= \sum_{j\in C} p_j(0)\,\{\underset{n\to\infty}{\text{غـــا}} p_{j,k}(n)\} = \pi_k.\end{aligned} \tag{8.8}$$

يقال ان لمتسلسلة ماركوف ذات فضاء الحالة C توزيعاً ثابتاً ان وجد توزيع احتمالي $\{\pi_k, k \in C\}$ ذو الخاصية الاتية : لكل k في C

$$\pi_k = \sum_{j \in C} \pi_j \, p_{j,k}. \qquad (8.9)$$

اما المصطلح التوزيعي الثابت فانه يأتي من الصيغة (المبينة في المعادلة 8.28) التالية :
اذا تحققت صحة المعادلة 8.9 فان لكل عدد صحيح n :

$$\pi_k = \sum_{j \in C} \pi_j \, p_{j,k}(n). \qquad (8.10)$$

وهكذا اذا اعتبرنا التوزيع الابتدائي غير المشروط $\{p_k(0), k \in C\}$ عبارة عن $\{\pi_k, k \in C\}$ فان لكل n , $p_k(n) = \pi_k$. اذن لمتسلسلة ماركوف $\{X_n\}$ توزيع ثابت غير شرطي او في الحقيقة هي عبارة عن عملية تصادفية ثابتة بصورة تامة .

تستخدم النتائج الاتية للمعادلتين 8.1 ، 8.3 لكي نحدد الشروط المطلوبة للتوزيعات الثابتة .

نظرية 8.A

لكل متسلسلة ماركوفية غير مختزلة ذات فضاء حالة C يوجد تابع $\{\pi_k, k \in C\}$ بحيث يكون لكل j ، k في C

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{j,k}(m) = \pi_k. \qquad (8.11)$$

بعبارة ثانية من المعادلة 8.11 يتقارب التابع $p_{j,k}(n)$ في متوسط سيسارو الى الحد π_k والذي يكون مستقلاً عن j

ملاحظة : ان التابع $\{\pi_k, k \in C\}$ الذي يحقق المعادلة 8.7 يحقق المعادلة 8.11 ايضا .

ان التابع الذي يحقق المعادلة 8.11 يكون غير سالب :

$$\pi_k \geq 0 \quad \text{لجميع قيم } k \text{ العائدة الى } C \qquad (8.12)$$

اذا كانت C عبارة عن متسلسلة ماركوفية محدودة فان $\{\pi_k, k \in C\}$ عبارة عن توزيع احتمالي . اي ان

$$\sum_{k \in C} \pi_k = 1. \qquad (8.13)$$

لاتحقق المعادلة 8.13 بالضرورة اذا كانت C غير محدودة بصورة خاصة ، لاتتحقق المعادلة 8.13 اذا كانت متسلسلة C غير معاودة لايمكن اختزالها فان $\pi_k = 0$ لجميع قيم k العائدة الى C .

قبل ان نحدد الشروط المطلوبة لتحقيق صحة المعادلة 8.13

نحدد العلاقات المختلفة التي تتحقق بالتتابع $\{\pi_k, k \in C\}$ الذي يحقق المعادلة 8.11.

نظرية 8B

نفرض ان C عبارة عن فضاء حالة لمتسلسلة ماركوف غير المختزلة افرض ان $\{\pi_k, k \in C\}$ عبارة عن تتابع يحقق المعادلة 8.11. ان :

$$\sum_{k \in C} \pi_k \leq 1, \qquad (8.14)$$

وان التتابع $\{\pi_k, k \in C\}$ يحقق نظام المعادلات الخطية

$$\pi_k = \sum_{j \in C} \pi_j \, p_{j,k}, \ k \in C. \qquad (8.15)$$

فضلا عن ذلك ، اذا وجدنا تتابع $\{u_k, k \in C\}$ عندما

$$\sum_k |u_k| < \infty, \qquad (8.16)$$

يحقق نظام المعادلات الخطية

$$u_k = \sum_{j \in C} u_j \, p_{j,k}, \ k \in C, \qquad (8.17)$$

فان

$$u_k = \pi_k \Big(\sum_{j \in C} u_j \Big) \cdot \qquad (8.18)$$

ملاحظة :

من المعادلة 8.15 اذا كان لمتسلسلة ماركوف توزيع طويل الاجل فان لها توزيعاً ثابتاً .

من معادلة 8.18 ان وجد توزيع فان التوزيع الثابت $\{\pi_k, k \in C\}$ عبارة عن الحل الوحيد لنظام المعادلات 8.15 التي تحقق

$$\sum_{k \in C} \pi_k = 1. \qquad (8.19)$$

البرهان :

لسهولة الكتابة نفرض ان فضاء الحالة C عبارة عن مجموعة من الاعداد الصحيحة من الاعداد الصحيحة $\{0, 1, 2, \cdots\}$ نعرف الآن

$$p_{j,k}^*(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{j,k}(m). \tag{8.20}$$

لكي نبرهن المعادلة 8.14 نلاحظ ان

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k}^*(n) = 1 \quad \text{لجميع قيم } n \tag{8.21}$$

وهكذا باستخدام نتيجة فاتوس Fatou's (راجع ملحق هذا الفصل) نحصل على

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\text{غا}}\, p_{j,k}^*(n) \leq \underset{n\to\infty}{\text{غا}} \sum_{k=0}^{\infty} p_{j,k}^*(n) = 1. \tag{8.22}$$

نبرهن الان المعادلة 8.15 باستعمال معادلة جابمان كولموكروف

$$p_{j,k}(n+1) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{j,i}(n)\, p_{i,k}. \tag{8.23}$$

وهكذا فان

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) p_{j,k}^*(n+1) - \frac{1}{n}\, p_{j,k}(1) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{j,i}^*(n)\, p_{i,k}. \tag{8.24}$$

اذا اخذنا غاية للمعادلة 8.24 عندما تقترب n من ∞ نحصـــل عـــلى

$$\pi_k = \underset{n\to\infty}{\text{غا}} \sum_{i=0}^{\infty} p_{j,i}^*(n)\, p_{i,k} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \{\underset{n\to\infty}{\text{غا}}\, p_{j,i}^*(n)\}\, p_{i,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{i,k}. \tag{8.25}$$

لكي نبرهن صحة معادلة 8.15 نتبع اسلوب التناقض – اذا لم تتحقق صحـة المعادلة 8.15 فانه من المعادلة 8.25 لقيمة ما k

$$\pi_k > \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i\, p_{i,k}. \tag{8.26}$$

من المعادلتين 8.25 , 8.26 نحصل على

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k > \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \, p_{i,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i, \qquad (8.27)$$

وهذا يستحيل . وهو المطلوب اثباته 8.15

لكي نبرهن معادلة ,8.18 نبرهن اولاً اذا تحققت صحة المعادلة 8.17 فان

$$u_k = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \, p_{j,k}(n) \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \cdots. \qquad (8.28)$$

لكي نبرهن معادلة 8.28 تستخدم مبدأ الاستنتاج الرياضي ، تتحقق صحة المعادلة 8.28 عندما $n = 1$ بالفرض . نثبت بعد ذلك اذا تحققت صحة المعادلة 8.28 للقيمة $n - 1$ ، فانها ستحقق لقيمة n أن

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} u_j \, p_{j,k}(n) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j \sum_{h=0}^{\infty} p_{j,h} \, p_{h,k}(n-1)\\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_j p_{j,h}\right) p_{h,k}(n-1)\\ &= \sum_{h=0}^{\infty} u_h p_{h,k}(n-1) = u_k.\end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب اثباته . نحصل من المعادلة 8.28 على

$$u_k = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \, p_{j,k}{}^*(n) \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \cdots. \qquad (8.29)$$

نحصل اذا فرضنا ان n تقترب الى ∞ في المعادلة ;8.29 من نظرية التقارب المهيمنة على المعادلة .8.18 (راجع ملحق هذا الفصل) . نستطيع الآن أن نحدد الشروط التي تكون لمتسلسلة ماركوف توزيعاً ثابتاً .

نظرية 8C

افرض أن C عبارة عن حالة الفضاء لمتسلسلة ماركوف غير المختزلة . اذا كانت C محدودة فان لمتسلسل ماركوف توزيعاً ثابتاً وحيداً .

اذا كانت C تتكون من عدد لامحدود من الحالات فان الشرطين الضروري أواللازم لحصول التابع $\{\pi_j, k \in C\}$ الذي يحقق المعادلة 8.11 على

$\pi_k > 0 \qquad (8.30)$ لـ k ما في C

لاجل وجود توزيع ثابت وحيد لمتسلسلة ماركوف .

لكي تتحقق صحة المعادلة 8.30 فان الشرطين الضروري والّلازم لوجود تابع متقارب بصورة مطلقة $\{u_k, k \in C\}$ لايساوي صفراً بصورة متماثلة وتحقق المعادلة 8.17 . اذا تحقق صحة المعادلة 8.30 فان

$$\pi_k > 0 \qquad (8.31)$$ لكل k عائدة الى C

البرهان

من النظرية 8B يحقق التابع $\{\pi_k, k \in C\}$ لكل k في C, مايلي

$$\pi_k = \pi_k\Big(\sum_{j \in C} \pi_j\Big) \cdot \qquad (8.32)$$

من المعادلتين 8.32 , 8.30 يتبين ان التابع $\{\pi_k, k \in C\}$ يحقق المعادلة 8.13 . التابع المتقارب $\{u_k\}$, الذي لايساوي صفراً بصورة متماثلة والذي يحقق المعادلة 8.17 يحقق ايضا المعادلة 8.18, وهذا يعني تحقيق صحة المعادلة 8.30 . لكي نبرهن 8.31 افرض ان j عبارة عن حالة في C .

اختر N , M بحيث يكون $p_{j,k}(N) > 0$ و $p_{k,j}(M) > 0$. من المعادلة 5.2

$$\pi_j \geq p_{j,k}(N)\ \pi_k\, p_{k,j}(M) > 0.$$

نظرية 8D

افرض ان C عبارة عن حالة فضاء لمتسلسلة ماركوف غير المختزلة ان العبارات الاتية متساوية المعنى :

(i) لمتسلسلة ماركوف توزيع ثابت

(ii) C معاودة موجبة (اي ان كل حالة في C عبارة عن حالة معاودة ولها متوسط عودة محدود)

(iii) وجود تابع متقارب بصورة مطلقة $\{\pi_k, k \in C\}$, لايساوي صفراً بالتماثل ، يحقق المعادلة 8.17 .

البرهان :

لكي نبرهن النظرية يكفي ان نبرهن (i) , (ii) . اذا كان لمتسلسلة ماركوف توزيع ثابت فان التابع $\{\pi_k, k \in C\}$ الذي يحقق المعادلة 8.11 يحقق معادلة 8.31 . من الواضح ان C معاودة ، لان $\pi_k = 0$ اذا كانت k غير معاودة . اذا كانت k معاودة فان

$$\pi_k = \frac{1}{m_{k,k}} \cdot \tag{8.33}$$

وهكذا فان المعادلة 8.31 تعني

$$m_{k,k} < \infty \quad \text{لكل} \quad k \quad \text{الى} \quad C. \tag{8.34}$$

وبالعكس ، اذا كانت C معاودة وان صحة المعادلة 8.34 متحققة ، فانه من المعادلة 8.33 تتحقق صحة المعادلة 8.31 .

ملاحظة :

من النظرية 8C نحصل على برهان للعبارة المذكورة في نهاية البند السابق والتي تنص على ان اية حالة تعود لمتسلسلة غير مختزلة وتكون موجبة معاودة فا ن جميعها ستكون موجبة معاودة . اذا علمت ان لبعض قيم k العائدة الى C تكون معاودة وان $m_{k,k} < \infty$ فانه من المعادلة 8.33 تتحقق صحة المعادلة 8.30 . اذن تتحقق صحة المعادلة 8.31 وايضا من المعادلة 8.33 نستنتج تحقيق صحة المعادلة 8.34 .

نتيجة :

نحصل على متوسط زمن المعاودة $\{m_{k,k}, k \in C\}$ بدلالة الحل $\{u_k, k \in C\}$ للمعادلة 8.17 كما يلي

$$m_{k,k} = \frac{1}{u_k} \Big(\sum_{j \in C} u_j \Big) \cdot \tag{8.35}$$

البرهان :

من المعادلة 8.18 نحصل على $\displaystyle \frac{1}{m_{k,k}} = \pi_k = \frac{u_k}{\sum_{j \in C} u_j} \cdot$

برهان اخر للمعادلة 8.35, والذي ينطبق على متسلسلات ماركوف المحدودة فقط ، وكما يلي :

نحصل من النظرية 7B على متوسط زمن العبور الاول $m_{j,k}$ الذي يحقق

$$m_{j,k} = 1 + \sum_{i \neq k} p_{j,i}\, m_{i,k}$$
$$= 1 + \sum_{i \in C} p_{j,i}\, m_{i,k} - p_{j,k}\, m_{k,k}.$$

اضرب طرفي المعادلة بـ u_j واجمع طرفي المعادلة لجميع قيم j العائدة الى C وكما يلي :

$$\sum_{j \in C} u_j\, m_{j,k} = \sum_{j \in C} u_j + \sum_{j \in C} u_j \sum_{i \in C} p_{j,i}\, m_{i,k} - m_{k,k} \sum_{j \in C} u_j\, p_{j,k}. \quad (8.36)$$

نحصل من المعادلتين 8.36 , 8.17 على

$$\sum_{j \in C} u_j\, m_{j,k} = \sum_{j \in C} u_j + \sum_{i \in C} u_i\, m_{i,k} - m_{k,k}\, u_k. \quad (8.37)$$

بما ان $\sum_{j \in C} u_j\, m_{j,k}$ محدودة نهائي (محدود) في حالة متسلسلة ماركوف المحدودة ويمكن طرحه من طرفي المعادلة 8.37 اذن سنحصل على المعادلة 8.35, من المعادلة 8.37

مثال 8A

المشيات العشوائية المعاودة الموجبة

المشية العشوائية العامة لحالة الفضاء $\{0, 1, 2, \cdots\}$ ومصفوفة الاحتمال الانتقالي المبينة في المعادلة 6.10 عبارة عن متسلسلة ماركوف غير المختزلة . لقد اثبتنا (في المثال 6C) انها تكون غير معاودة اذا تحققت صحة المعادلة 6.29 وانعكس صحيح . للحصول على الشروط التي تكون عندها موجبة معاودة نحتاج ان نبحث عن الشروط التي عندها يوجد حل مطلق متقارب للمعادلة 8.17.

يمكن تثبيت نظام المعادلات 8.17 في حالة المشيات العشوائية العامة كما يلي :

$$u_0 = u_0\, r_0 + u_1\, q_1,$$
$$u_j = u_{j-1}\, p_{j-1} + u_j\, r_j + u_{j+1}\, q_{j+1} \qquad \text{for } j \geq 1. \quad (8.38)$$

عندما $j \geq 0$ فان $r_j = 1 - p_j - q_j$, $r_0 = 1 - p_0$ اذن نستطيع كتابة هاتين المعادلتين كما يلي :

$$u_1 q_1 - u_0 p_0 = 0,$$
$$u_{j+1} q_{j+1} - u_j p_j = u_j q_j - u_{j-1} p_{j-1} \qquad \text{for } j \geq 1. \tag{8.39}$$

لاي $k \geq 0$ نحصل من المعادلة 8.39 على

$$u_{k+1} q_{k+1} = u_k p_k, \tag{8.40}$$

لان

$$u_{j+1} q_{j+1} - u_j p_j = u_j q_j - u_{j-1} p_{j-1} = \cdots = u_1 q_1 - u_0 p_0 = 0.$$

الحل العام $\{u_k, k = 0, 1, \cdots\}$ للمعادلة 8.38 يعطي بالصيغة

$$u_k = u_0 \frac{p_0 \cdots p_{k-1}}{q_1 \cdots q_k}. \tag{8.41}$$

حيث u_0 كمية ثابتة غير معلومة .

لكي يكون التابع المعرف بالمعادلة 8.41 متقارباً بصورة مطلقة فان الشرطين الضروري واللازم لذلك كما يلي :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{k-1}}{q_1 \cdots q_k} < \infty. \tag{8.42}$$

ان المعادلة 8.42 عبارة عن الشرط الضروري واللازم لكون المشية العشوائية العامة معاودة موجبة . تتحقق صحة المعادلة 8.42 في حالة المشية العشوائية للمحاولات المتكررة عندما $p_k = p,\ q_k = q,$ اذا كانت $p<q$ والعكس صحيح . يعطي التوزيع الثابت $\{\pi_k, k = 0, 1, \cdots\}$ كما يلي :

$$\pi_k = \frac{u_k}{\sum_{k=0}^{\infty} u_k} = \frac{u_0 (p/q)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} u_0 (p/q)^k} = \frac{q-p}{q} \left(\frac{p}{q}\right)^k \tag{8.43}$$

نحصل من المعادلتين 8.43 ، 8.33 على متوسط زمن المعاودة

$$m_{k,k} = \frac{1}{\pi_k} = \frac{q}{q-p} \left(\frac{q}{p}\right)^k \quad \text{if} \quad p < q. \tag{8.44}$$

ان الاشتقاق الحالي للمعادلة 8.44 اسهل بكثير من الاشتقاق في المثال السابق 7C,.

نستطيع ان نحدد الحل $\{\pi_k, k \in C\}$ للمعادلة 8.15. لبعض انواع متسلسلات ماركوف غير المختزلة بواسطة التحري .

يطلق على مصفوفة الاحتمال الانتقالي $P = \{p_{j,k}\}$ بانها تصادفية ثنائية doubly stochastic اذا كان مجموع اي عمود يساوي 1 .

$$\sum_j p_{j,k} = 1 \quad \text{لجميع قيم } k. \tag{8.45}$$

ان حل المعادلة 8.15 في حالة متسلسلة ماركوف غير المختزلة ذات مصفوفة الاحتمال الانتقالي التصادفية الثنائية التي لها فضاء حالة محدودة وتحتوي على K حالة كما يلي :

$$\pi_k = \frac{1}{K}, \; k \in C. \tag{8.46}$$

لكي نبرهن ذلك نحتاج فقط ان نبين ان التوزيع الاحتمالي المعرف بالمعادلة 8.46 يحقق المعادلة 8.15.

وهكذا نحصل على متوسط زمن المعاودة كما يلي

$$m_{k,k} = K, \quad k \in C. \tag{8.47}$$

مثال : 8B

عندما تكون مصفوفة الاحتمال الانتقالي لمتسلسلة ماركوف كما يلي :

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix},$$

فان $\pi_k = \frac{1}{3}$, $m_{k,k} = 3$ لجميع قيم k

Periodic and aperiodic states.

لكي نوضح الشروط التي عندها تكون لمتسلسلة ماركوف غير المختزلة توزيع طويل المدى long-run distribution, نحتاج ان نعرف مفهوم دورة *period* كل حالة .

تعرف الدورة $d(k)$ لحالة عائدة k لمتسلسلة ماركوف بانها القاسم المشترك الاعظم لمجموعة الاعداد الصحيحة n عندما $p_{k,k}(n) > 0$ بالرموز :

$$d(k) = g.c.d. \; \{n: p_{k,k}(n) > 0\}. \tag{8.48}$$

يقال أن الحالة دورية *aperiodic* اذا كان لها دورة – تساوي 1 .

الدورة $d(k)$ لحالة ما عبارة عن اكبر عدد صحيح بحيث يكون لاي عدد صحيح n خاصية الى k في n مرحلة وسيكون بالضرورة مضاعفات $d(k)$.من الطبيعي أن تسأل السؤال الاتي :

هل لكل عدد صحيح n عندما تكون مضاعفات $d(k)$ خاصية كون $p_{k,k}(n) > 0$ ؟ برهنا في التكملة 8D

أن لكل حالة k يوجد عدد صحيح M_k بحيث $p_{k,k}(n) > 0$ لكل عدد صحيح n من مضاعفات $d(k)$ واكبر من M_k .

وهنا في التكملة 8C, أن لكل حالتين متبادلتين نفس الدورة . وعلى هذا الاساس نعرف دورة الصف المتبادل بانها الدورة المشتركة بين جميع حالات الصف .

برهنا في البند 6–10, النظرية الآتية :

نظرية 8E

تتحقق صحة المعادلة 8.5 لكل k عائدة الى C في حالة متسلسلة ماركوف غير المختزلة ذات الدورة 1 وذات حالة الفضاء C . وهكذا سيوجد تتابع $\{\pi_k, k \in C\}$ بحيث تتحقق صحة المعادلة 8.7 لكل حالتين j ، k عائدتين الى C .

من السهولة ان نضرب مثلا يبين عدم صحة تحقيق المعادلة 8.5 في حالة متسلسلة ماركوف ذات الدورة . افرض وجود متسلسلة ماركوف المتجانسة في حالة فضاء $\{0, 1\}$ ومصفوفة احتمال انتقالي مبينة ادناه

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

لاحظ ان المتسلسلة لايمكن اختزالها وان لكل حالة دورة 2. اضافة الى ذلك

$$p_{0,0}(n) = 1 \quad \text{اذا كان } n \text{ عدد زوجي}$$
$$= 0 \quad \text{اذا كان } n \text{ عدد فردي}$$

وان المعادلة 8.5 لاتتحقق صحتها عندما $k = 0$ ان مصفوفة الاحتمال الانتقالية P تصادفية ثنائية بحيث تتحقق صحة المعادلة 8.11 عندما $\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$

باستخدام النظريات 8B ,8C ,8E نحصل على النظرية المهمة والتي تؤدي دوراً مركزيا في تطبيقات متسلسلات ماركوف.

نظرية 8F

ان لمتسلسلة ماركوف المعاودة الموجبة غير المختزلة ذات الدورة 1 توزيعاً وحيداً طويل المدى. ان الشرط الضروري واللازم لكون متسلسلة ماركوف غير المختزلة ذات الدورة 1 تمتلك توزيعاً طويل المدى هو وجود التابع المتقارب $\{u_k, k \in C\}$ الذي لايساوي صفراً بالتماثل ـ والذي يحقق المعادلة 8.17.

أن التوزيع طويل المدى $\{\pi_k, k \in C\}$ لمتسلسلة ماركوف المعاودة الموجبة غير المختزلة ذات الدورة 1 هو عبارة عن الحل الوحيد لنظام المعادلات 8.15 الذي يحقق المعادلة 8.13.

توجد عدة طرق لاثبات أن لمتسلسلة ماركوف غير المختزلة دورة تساوي 1 احدى الطرق عبارة عن توضيح حالة k التي تكون $p_{k,k} > 0$ مثل هذه الحالة عادة ستكون ذات دورة 1.

الطريقة الاخرى المتاحة لمتسلسلات ماركوف المحدودة هي ايجاد عدد صحيح n بحيث يكون $p_{j,k}(n) > 0$ لكلا الحالتين j , k العائدتين الى C.

أن وجد مثل هذا العدد الصحيح n فاننا نستطيع أن نحسب بسرعة المصفوفات الاحتمالية الانتقالية $P^2, P^4, P^8, \cdots P^{2^n}, \cdots$.

مثال 8C

التحول الطبيعي — Social mobility.

المشكلة المهمة في الحياة الاجتماعية هي مايلي : الى أي حد يؤثر الانحدار الطبقي للاب . الجد ... على الطبقة الاجتماعية للابناء ؟ احد الاساليب التي يمكن تحديد طبقة الاشخاص هي من خلال مهنهم . اذن نستطيع بعد ذلك أن نجد احتمال الانتماء الوظيفي لوظيفة ذات درجة عليا ـ متوسطة ـ دنيا اذا علمنا أن وظيفة الاب كانت ذات درجة عليا ـ متوسطة أو دنيا . عندما ندرس التحول الاجتماعي سنحصل على جدول الاحتمالات الشرطية الاتي (للحصول على مراجع اخرى ـ راجع Prais [1955]).

الدرجة الوظيفية للابنـــاء

		عليــا	متوسطة	دنيــا
الدرجة الوظيفية	عليــا	.448	.484	.068
للابــاء	متوسطــة	.054	.699	.247
	دنيــا	.011	.503	.486

افترض ان الانتقال بين الطبقات الاجتماعية للاجيال المتعاقبة للعائلة يمكن اعتباره انتقالا حسب متسلسلة ماركوف (ذات الحالات 1, 2, 3, الممثلة على التوالي للدرجة العلياوالمتوسطة و الدنيا) وان مصفوفة الاحتمال الانتقالي كما يلي :

$$P = \begin{bmatrix} .448 & .484 & .068 \\ .054 & .699 & .247 \\ .011 & .503 & .486 \end{bmatrix} \cdot \qquad (8.49)$$

ان هذه المتسلسلة محدودة ، غير مختزلة ، ذات دورة 1 .اذن لها توزيع طويل المدى (π_1, π_2, π_3) وهو عبارة عن الحل الوحيد لنظام المعادلات (المكتوب عـــلى شكل مصفوفة)

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)P = (\pi_1, \pi_2, \pi_3). \qquad (8.50)$$

عندما تكون P عبارة عن المصفوفة 8.49 فان

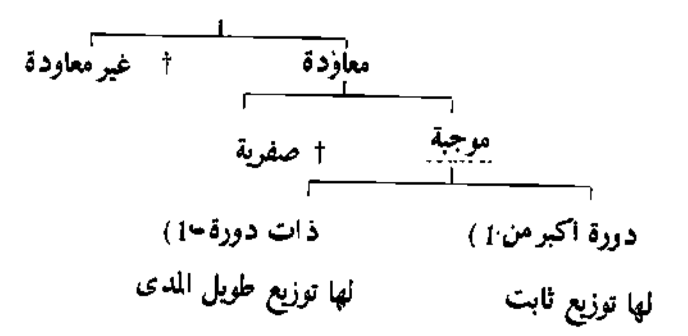
$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .067 \\ .624 \\ .309 \end{pmatrix} \cdot \qquad (8.51)$$

يمكن تفسير المعادلة 8.51 كما يلي : المجتمع الذي يكون التحول الطبقـــي بين طبقاته عبارة عن متسلسلة ماركوف ذات مصفوفة الاحتمال الانتقالي P المبينة بالمعادلة 8.49 سيتكون بعد عدة اجيال من النسب التالية لكل طبقة من الطبقات :

6.7 % درجة عليا 62.4 % درجة متوسطة 30.9 % درجة دنيا .

انهينا الان الدراسة المتعلقة بالنظرية الاساسية لمتسلسلات ماركوف المتقطعة المعلم
يبين الجدول رقم 6.5 خلاصة الخطوات المتبعة عند تبويب متسلسلة ماركوف غير المختزلة .نلخص في الجدول رقم 6.6 الخواص الاساسية للمشيات العشوائية العامة .في الجدول رقم 6.7 نكتب بعض المعايير المتاحة لتبويب متسلسلات ماركوف غير المختزلة . للحصول على برهان هذه النظريات راجع Foster (1953) .يوضح المثال 8D استخدام هذه المعايير .

جدول رقم 6.5. تبويب متسلسلة ماركوف غير المختزلة



† تكون هذه الخاصية فقط لمتسلسلات ماركوف غير المحدودة (اللانهائية)

مثال : 8D

الاحتمالات الثابتة لمتسلسلة ماركوف ذات نظام الانتظار $M/G/1$

احدى التطبيقات المهمة لنظرية التوزيعات طويلة المدى والثابتة لمتسلسلات ماركوف غير المختزلة هي نظرية الانتظار في الصفوف . اعتبر متسلسلة ماركوف ذات نظام الانتظار $M/G/1$ المبينة مصفوفة احتمالها الانتقالي في المثال 2B افرض ان

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n$$

عبارة عن متوسط عدد الزبائن الذين يصلون الى النظام خلال زمن خدمة زبون ما . يمكن ان نثبت

$$\rho = \lambda\, E[S] = \frac{\text{متوسط زمن الخدمة}}{\text{متوسط زمن وصول الزبون}}$$

جدول رقم 6.6. خواص المشيات العشوائية العامة لحالة الفضاء $\{0, 1, 2, \cdots\}$ ذات مصفوفة احتمال انتقالي تحقق المعادلتين 6.15 ، 6.13

نعرف $P_m = \frac{p_0 \cdots p_{m-1}}{q_1 \cdots q_m} = \frac{p_0}{p_m \rho_m}$, $\rho_m = \frac{q_1 \cdots q_m}{p_1 \cdots p_m}$, $\rho_0 = 1$

عندما $m \geq 1$

تكون المشية العشوائية	اذا كانت .. والعكس صحيح	يتم برهانها في
معاودة	$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m = \infty$	المثال 6B
غير معاودة	$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m < \infty$	المثال 6B
موجبة معاودة		المثال 8A
معاودة صفرية	$\sum_{m=1}^{\infty} P_m < \infty$ and $\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m = \infty$	المثال 8A
	$\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m = \infty$ and $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p_m \rho_m} = \infty$	

احتمالات العبور الاول في الحالة غير المعاودة (مثال 6A) :

$$f_{j,j} = 1 - \left\{ \frac{p_j \rho_j}{\sum_{m=j}^{\infty} \rho_m} \right\},$$

$$f_{j,k} = \frac{\sum_{m=j}^{\infty} \rho_m}{\sum_{m=k}^{\infty} \rho_m}, \; j < k.$$

متوسط ازمنة العبور الاول في الحالة المعاودة (المثالين 7A ، 7C)

$$m_{0,0} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_0}{p_m \rho_m} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m;$$

$$m_{k,k} = m_{0,0} \frac{1}{P_k}, \; k > 1;$$

$$m_{j,k} = \sum_{s=j}^{k-1} \rho_s \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{s} \frac{1}{p_m \rho_m} \right\}, \; j < k,$$

$$m_{j,k} = \sum_{s=k}^{j-1} \rho_s \sum_{m=s+1}^{\infty} \frac{1}{p_m \rho_m}, \; k > j.$$

جدول رقم 6.7 بعض معايير تبويب متسلسلات ماركوف غير المختزلة ذات حالة الفضاء $\{0, 1, 2, \cdots\}$

(1) موجبة معاودة اذا كانت	$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_j p_{j,i}, \quad i = 0, 1, \cdots$ لها حل $\{u_i\}$ متقارب مطلق لايساوي صفراً بالتماثل والعكس صحيح
(2) موجبة معاودة اذا كانت	$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} x_j \le x_i - 1, \quad i \neq 0$ لها حل $\{x_i\}$ غير سالب يحقق $\sum_{j=0}^{\infty} p_{0,j} x_j < \infty$ والعكس صحيح
(3) غير معاودة اذا كانت	$\sum_{j=1}^{\infty} p_{i,j} y_j = y_i, \quad i \neq 0,$ لها حل $\{y_i\}$ غير ثابت محدود حقيقيا والعكس صحيح
(4) معاودة اذا كانت	$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} y_j \le y_i, \quad , \quad i \neq 0$ لها حل غير محدود حقيقيا $\{y_i\}$ ؛ . اي ان $y_i \to \infty$ عندما $i \to \infty$

دعنا نبرهن ان متسلسلة ماركوف $\{X_n\}$

تكون :

(i) معاودة موجبة اذا كانت $\rho < 1,$

(ii) معاودة صفرية اذا كانت $\rho = 1$

(iii) غير معاودة اذا كانت $\rho > 1$

اعتبر اولا الحالة الاولى عندما $\rho \le 1$. افرض وجود تتابع $y_j = j$ ان

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} y_j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} j = i - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k$$
$$= i - 1 + \rho = y_i - (1 - \rho) \le y_i.$$

بالمعيار (4) في الجدول رقم 6.7 . ستكون المتسلسلة معاودة اذا كانت $\rho \le 1$ نحصل من الحسابات اعلاه ايضا . اذا كانت $\rho < 1$ على

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} \left(\frac{j}{1-\rho}\right) \le \frac{i}{1-\rho} - 1.$$

لان (افرض ان $[x_j = j/(1-\rho)]$

$$(1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty} p_{0,j}\, x_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, j < \infty,$$

من المعيار (2) يتبين لنا ان المتسلسلة معاودة موجبة اذا كانت $\rho < 1$ ولكي نبرهن ان المتسلسلة غير معاودة اذا كانت $\rho > 1$ تستخدم المعيار (3) . افرض ان $y_j = z^j$ حيث ان z عددا يحقق العلاقة $0 < z < 1$ ويجب ان يحدد . عندما $i > 0$ فان

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}\, y_j = \sum_{j=i}^{\infty} a_{j-i+1}\, z^j = z^{i-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k.$$

ان التابع $y_j = z^j$ يحقق المعادلات

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}\, y_j = y_i, \ i \neq 0,$$

اذا كان z يحقق

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k = z. \tag{8.52}$$

باستخدام النظرية الاساسية لعمليات التفرع branching processes نجد عدد z محصوراً في الفاصلة $0 < z < 1$ يحقق المعادلة 8.52 اذا كانت $\rho > 1$.

نحدد بعد ذلك التوزيع الطويل المدى $\{\pi_k, k = 0, 1, 2, \cdots\}$ والذي تكون لهقيمة حقيقية عندما تكون $\rho < 1$ وذلك بايجاد حل لنظام المعادلات

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j\, p_{j,k} = \pi_k, \ k = 0, 1, \cdots,$$

او

$$\pi_k = \pi_0\, a_k + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j\, a_{k-j+1}, \ k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{8.53}$$

يمكن حل هذه المعادلات باستخدام الدوال المولدة generating functions

$$\Pi(z) = \sum_{j=0} \pi_j\, z^j, \ A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j.$$

بعد ضرب طرفي المعادلة 8.53 بالكمية z^k وجمع الحدود لجميع قيم k نحصل على

$$\Pi(z) = \pi_0\, A(z) + \frac{1}{z}\{A(z)\Pi(z) - \pi_0\, a_0\} - \frac{\pi_0}{z}\{A(z) - a_0\},$$

والتي يمكن ان تحل للحصول على $\Pi(z)$:

$$\Pi(z) = \pi_0\, \frac{(z-1)A(z)}{z - A(z)}. \tag{8.54}$$

تتحدد الدالة المولدة للتوزيع الطويل المدى بالمعادلة 8.54 التي تحتوي على العامل الثابت π_0

لايجاد قيم π_0, نجد غاية المعادلة 8.54. عندما z تقترب الى 1. عندما $z \to 1,$ فان :

$$\frac{z - A(z)}{z - 1} = 1 - \frac{1 - A(z)}{1 - z} \to 1 - A'(1) = 1 - \rho,$$

$$A(z) \to 1,\ \Pi(z) \to 1.$$

اذن

$$1 = \frac{\pi_0}{1 - \rho},$$

او

$$\pi_0 = 1 - \rho.$$

ناقش نماذج الانتظار في الصفوف في البند 2-7 .

المكملات

8A افرض متسلسلة لماركوف غير مختزلة C لها عدد لامحدود من الحالات ولها مصفوفة احتمال انتقالي P تكون تصادفية ثنائية .اي انه لجميع قيم i ، j العائدة الى C فان

$$\sum_{i \in C} p_{i,j} = \sum_{j \in C} p_{i,j} = 1.$$

اثبت ان C ليست موجبة معاودة .

8B اثبت ان متسلسلة ماركوف المحدودة غير المختزلة تكون معاودة موجبة .

تلميح : اثبت ان $\sum_{k \in C} \pi_k = 1.$ ومن ثم حقق صحة المعادلة 8.30 .

8C اثبت ان لكل حالتين متبادلتين نفس الدورة .

تلميح : اثبت انه يكفي لكي نبرهن اذا كانت k ، j فان $d(j)$ تقسم $d(k)$. اختر M ، N بحيث يكون $p_{j,k}(M)p_{k,j}(N) > 0$. اثبت اذا كان $p_{j,j}(n) > 0$ فان $p_{k,k}(M + n + N) > 0$ وان $p_{k,k}(M + 2n + N) > 0$ وهكذا فان $d(k)$ تقسم $M + n + N$ ، $M + 2n + N$ وان $d(k)$ تقسم الى n عندما $p_{j,j}(n) > 0$ اذن $d(k)$ تقسم $d(j)$. لان $d(j)$ عبارة عن القاسم المشترك الاعظم لمجموعة n عندما $p_{j,j}(n) > 0$

8D البت ان لكل حالة k يوجد عدد صحيح M_k بحيث يكون لجميع قيم $m \geq M_k$

$$p_{k,k}(m\,d(k)) > 0.$$

وذلك باثبات صحة النتيجة الاتية :

نتيجـــة :

اذا كانت A عبارة عن مجموعة من الاعداد الصحيحة الموجبة المختلفة وفقا لقانون الجمع ، وان d عبارة عن القاسم المشترك الاعظم لـ A فانه يوجد عدد موجب M بحيث تنتمي الاعداد الصحيحة الموجبة md الى A لجميع الاعداد الصحيحة $m \geq M$.

تلميح : كون مجموعة من الاعداد الصحيحة الموجبة S والتي تكون عبارة عن علاقة خطية محدودة كما يلي :

$$b_1n_1 + b_2n_2 + \cdots + b_kn_k,$$

حيث $n_1, \cdots, n_k$ تنتمي الى A، وان $b_1, \cdots, b_k$ تكون اعداداً صحيحة موجبة اوسالبة . ارمز لاصغر عدد صحيح موجب ضمن المجموعة S بالرمز d' اثبت ان d' عبارة عن القاسم المشترك لجميع الاعداد الصحيحة العائدة الى A (اذا لم تكن الحالة كذلك . فهذا يعني وجود عدد صحيح n ينتمي الى A وعدد صحيح موجب k بحيث يكون $n - kd'$ عدداً صحيحاً موجباً اصغر من d'، وهذا مستحيل لان $n - kd'$ ينتمي الى S، وان d' اصغر عدد صحيح موجب ضمن المجموعة S) . يمكن الان ان نعبر عن d' كما يلي :

$$d' = a_1n_1 + a_2n_2 + \cdots + a_rn_r \qquad (1)$$

لبعض الاعداد الصحيحة $n_1, \cdots, n_r$ العائدة الى A والاعداد الصحيحة الموجبة او السالبة $a_1, \cdots, a_r$.

من ذلك نحصل على ان d' يساوي القاسم المشترك الاعظم d لجميع عناصر A لانه من المعادلة 1 كل عدد d'' يقسم جميع الاعداد الصحيحة العائدة الى A يقسم d' اعد ترتيب حدود المعادلة 1 بحيث تكتب الحدود الموجبة المعامل اولا . بما ان A مغلقة وفقا للجمع فان d يمكن ان تكتب كما يلي :

$$d = N_1 - N_2$$

لاي عددين صحيحين N_1 ، N_2 عائدين الى A . افرض ان M عبارة عن عدد صحيح موجب يحقق $M \geq (N_2)^2\, d$ لاي عدد صحيح $m \geq M$ فان العدد

الصحيح md يمكن ان يكتب بالشكل $md = aN_2 + bd$ حيث a ، b عبارة عن عددين غيرسالبين يحققان $a \geq N_2$ ، $b < N_2$ وهكذا سينتمي md الى A.

8E – اثبت اذا كانت j و k متبادلتين ، واذا كانت $p_{j,k}(n) > 0$ ، $p_{j,k}(n') > 0$ فان $d(k)$ يقسم $| n - n' |$. بعبارة ثانية يمكن الوصول الى حالة ما باحتمال موجب عند الازمنة التي تختلف بمضاعفات دورة تلك الحالة فقط .

8F – تجزئة الصف الدوري غير المختزل الى صفوف جزيئة . اثبت أن متسلسلة ماركوف غير المختزلة ذات الدورة d يمكن تجزئتها الى d من الصفوف الجزئية المنفصلة $C(0), C(1), \cdots, C(d-1),$ مرتبة بحيث يمكن الوصول في مرحلة واحدة من الحالة $C(r)$ الى الحالة $C(r+1)$ فقط ، حيث نفرض أن $r+1=0$ اذا كانت $r=d-1$ اثبت عند اعتبارنا لمتسلسلة عند الأزمنة $d, 2d, \cdots,$ فقط فاننا سنحصل على متسلسلة جديدة لها مصفوفة احتمال انتقالي P^d حيث أن كل صف جزئي $C(r)$ يكون متسلسلة مغلقة ذات دورة 1 .

تلميح اخترحالة j التي تعود الى C . اثبت أن لكل k عائد الى C يوجد عدد صحيح $r(k)$ بحيث $0 \leq r(k) \leq d-1$ وان $p_{j,k}(n) > 0$ تعني $n \equiv r(k) \pmod d$. افرض أن $C(r)$ عبارة عن مجموعة جميع الحالات k بحيث $r(k) = r$

التمارين :

تعرف متسلسلة مارڪوف في التمارين 8.1 الى 8.10 بواسطة حالة الفضاء S ومصفوفة الاحتمال الانتقالي .

(i) اوجد مجموعة الحالات غير المعادة T .

(ii) اوجد $f_{j,k}$ عندما تكون جميع حالات j عائدة الى S وأن k لاتعود الى T .

(iii) في حالة كون جميع حالات j العائدة الى T, . اوجد متوسط زمن الانتهاء m_j لمجموعة الحالات المعاودة اذا علمت بابتداء المتسلسلة عند الزمن j .

(iv) لجميع حالتي j , k المعاودة والتي يمكن تبادلها اوجد متوسط زمن العبور الاول $m_{j,k}$.

(v) اوجد لجميع حالتي j , k العائدتين الى S مايلي :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{j,k}(m).$$

(vi) لجميع حالتي j , k العائدتين الى S اذكر هل توجد قيمة لـ $\underset{n\to\infty}{\text{غــا}}\; p_{j,k}(n)$

في التمارين 8.1 الى 8.8, تكون حالة الفضاء $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

8.1 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.2 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.3 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

8.4 $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.5 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.6 $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.7 $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

8.8 $P=\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

8.9 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

8.10 $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

افترض في التمارين 8.11 الى 8.13 متسلسلة ماركوف غير المختزلة ذات حالة الفضاء $S = \{0, 1, \cdots\}$. اذكر هل ان المتسلسلة موجبة معاودة. معاودة تساوي صفراً او غير معاودة . اذا كانت موجبة معاودة ، أوجد توزيعها الثابت ثم اذكر هل لها توزيع طويل المدى .

8.11 للمتسلسلة احتمالات انتقالية عندما $k = 0, 1, \cdots$, كما يلي

$$p_{k,0} = \frac{k+1}{k+2} \quad \text{and} \quad p_{k,k+1} = \frac{1}{k+2}.$$

8.12 للمتسلسلة احتمالات انتقالية عندما $k = 0, 1, \cdots$ كما يلي :

$$p_{k,0} = \frac{1}{k+2} \quad \text{and} \quad p_{k,k+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

8.13 $\{X_n\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف لنظام انتظار من نوع $GI/M/1$ وان

$$1 > \frac{\text{متوسط زمن الخدمة}}{\text{متوسط زمن الوصول}}$$

تلميح : ابحث عن حل يكون بالصيغة $\pi_j = c\, x^j$.

6.9 نظرات الغاية لازمنة التواجد

LIMIT THEOREMS FOR OCCUPATION TIMES

التوزيع الثابت $\{\pi_k, k \in C\}$ لمتسلسلة ماركوف المعادة الموجبة غير المختزلة ذات حالة الفضاء C يمكن ان يوضح على انه غاية متوسط زمن التواجد في الحالة k خلال الانتقالات n الاولى عندما n .بدقة اكثر.

$$P\left[\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} \frac{1}{n} N_k(n) = \pi_k \mid X_0 = j\right] = 1 \tag{9.1}$$

حيث $\pi_k = 1/m_{k,k}$ لايكون غريبا عندما تتحقق صحة المعادلة 9.1 وذلك لان الاحتمال π_k (وجود المتسلسلة في حالة k) يمثل التكرار النسبي للمحاولات عندما تكون المتسلسلة في حالة k. والتي تمثل بالغاية $(1/n)\, N_k(n)$ عندما $n\to\infty$ تقترب الى . يجب ان نذكر ان المعادلة 9.1 تعني ان

$$E\left[\frac{1}{n} N_k(n) \mid X_0 = j\right] = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} p_{j,k}(n) \to \pi_k, \tag{9.2}$$

عندما تقترب n الى ∞ حيث عند برهنة المعادلة 9.1 نحصل على البرهان الاحتمالي للمعادلة 8.4.

لكي نبرهن صحة المعادلة 9.1 نعتبر متسلسلة ماركوف الموجبة المعاودة غير المختزلة التي تكون في حالة j، عند الزمن صفر ، واعتبر تتابعاً من المتغيرات العشوائية $T_1, T_2, \cdots$ المعرفة كما يلي :

T_1 عبارة عن زمن العبور الاول من j الى k (اى ان T_1 عبارة عن عدد مرات الانتقال حتى وصول المتسلسلة الى الحالة k لاول مرة)

T_2 زمن العودة الى k (اى ان T_2 عبارة عن عدد مرات انتقال المتسلسلة من وقت وجودها في الحالة k لاول مرة الى زمن وجودها في حالة k للمرة الثانية) . عندما $n > 1$ فان T_n عبارة عن عدد مرات الانتقال الحاصل عند وجود المتسلسلة في k للمرة $(n-1)$ وحتى المرة n .

نستطيع ان نعرف التتابع $\{T_n\}$ بصيغة اخرى بدلالة ازمنة التواجد $N_k(n)$ كما يلي . عندما $n = 1, 2, \cdots$, افرض

W_n (9.3) = أصغر كمية في المجموعة $w \geq 1$ بحيث $N_k(w) = n$ بعبارة اخرى W_n عبارة عن عدد مرات انتقال المتسلسلة حتى وجود المتسلسلة في الحالة k للمرة n .

نطلق W_n بزمن الانتظار حتى التواجد في حالة k، للمرة n بسهولة نحقق ما يلي

$$\begin{aligned} T_1 &= W_1, \\ T_n &= W_n - W_{n-1} \qquad \text{for } n \geq 2. \end{aligned} \tag{9.4}$$

نطلق على T_n بزمن الوصول بين التواجد $(n-1)$ والتواجد n في k

نظرية 9A

يكون تتابع ازمنة الوصول $T_1, T_2, \cdots$ لاية متسلسلة من متسلسلات ماركوف المعاودة الموجبة غير المختزلة بين التواجد في حالة k عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة . ان المتغيرات العشوائية $T_2, T_3, \cdots$ موزعة بصورة متماثلة بدلالة احتمالات العبور الاول لـ k,

$$P[T_n = t] = f_{k,k}(t), \qquad t = 1, 2, \cdots, \tag{9.5}$$

اذا علمت ان المتسلسلة عند الحالة j عند الزمن صفر .

$$P[T_1 = t] = f_{j,k}(t), \qquad t = 1, 2, \cdots. \tag{9.6}$$

البرهان :

تتحقق صحة 9.6 من حقيقة كون $X_0 = j$ وان

$$P[T_1 = t] = P[X_t = k, X_\nu \neq k \text{ for } \nu = 1, \cdots, t-1 \mid X_0 = j] = f_{j,k}(t).$$

لكي نبرهن المعادلة 9.5, نلاحظ اولا عندما $n = 1, 2, \cdots$ فان

$$P[T_{n+1} = t \mid W_n = w] = P[X_{w+t} = k, X_{w+\nu} \neq k, \nu = 1, \cdots, t-1 \mid X_w = k] = f_{k,k}(t). \quad (9.7)$$

وهكذا فان

$$P[T_{n+1} = t] = \sum_{w=1}^{\infty} P[T_{n+1} = t \mid W_n = w]\, P[W_n = w] = f_{k,k}(t).$$

لكي نبرهن استقلالية $T_1, T_2, \cdots T_n$ لاي عدد صحيح n,

نثبت مايلي (للاعداد الصحيحة $t_1, \cdots, t_n$)

$$P[T_1 = t_1, T_2 = t_2, \cdots, T_n = t_n] = P[T_1 = t_1]\, P[T_2 = t_2] \cdots P[T_n = t_n]. \quad (9.8)$$

تساوي الجهة اليسرى من المعادلة 9.8 مايلي :

$$P[T_1 = t_1]\, P[T_2 = t_2 \mid T_1 = t_1] \cdots P[T_n = t_n \mid T_1 = t_1, \cdots, T_{n-1} = t_{n-1}].$$

من المعادلة 9.7 نحصل عندما $\nu = 1, 2, \cdots$ على

$$P[T_{\nu+1} = t_{\nu+1} \mid T_1 = t_1, \cdots, T_\nu = t_\nu] = P[T_{\nu+1} = t_{\nu+1} \mid W_\nu = t_1 + \cdots + t_\nu] = f_{k,k}(t_{\nu+1}) = P[T_{\nu+1} = t_{\nu+1}].$$

وهو المطلوب اثباته بالنسبة للمعادلة 9.8

بما ان زمن الانتظار W_n حتى التواجد n في k يمكن ان يمثل على شكل مجموع n من المتغيرات العشوائية المستقلة $T_1, \cdots, T_n$. فان من نظريات الغاية الكلاسيكية لنظرية الاحتمال يمكن الحصول على نظريات غاية لتتابع ازمنة الانتظار $\{W_n\}$

نظرية 9B

افرض ان k عبارة عن حالة معاودة بمتوسط زمن عودة محدود $m_{k,k}$. افرض ان j عبارة عن حالة تتبادل مع k . افرض ان W_n معرفة بالمعادلة 9.3. فان

$$P\left[\underset{n \to \infty}{\text{غا}} \frac{1}{n} W_n = m_{k,k} \mid X_0 = j\right] = 1. \quad (9.9)$$

وعلاوة على ذلك ، اذا كان لزمن عودة k عزم ثنائي محدود $m_{k,k}^{(2)}$
ولذلك سيكون التباين محدوداً

$$\sigma_{k,k}^2 = m_{k,k}^{(2)} - \{m_{k,k}\}^2, \qquad (9.10)$$

فان W_n سيكون طبيعي التقارب بمعنى ان لكل عدد حقيقي x

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} P\left[\frac{W_n - n\, m_{k,k}}{\sqrt{n}\,\sigma_{k,k}} \le x\right] = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(1/2)y^2}\, dy. \qquad (9.11)$$

لايمكن برهنة المعادلتين 9.9 ، 9.11. حيث ان برهانهما يقع خارج نطاق هذا الكتاب .

ان هذين البرهانين عبارة عن نتائج لقانون الاعداد الكبيرة القوى ونظرية الحد المركزية للمجموعات المتعاقبة للمتغيرات العشوائية الموزعة بصورة متماثلة مستقلة . لمناقشة النظريات بصورة اوليه راجع كتاب الاحتمالات الحديثة الفصل 10 .للحصول على مناقشة متقدمة راجع كتاب Loève (1960)

يمكن الحصول على المعادلة 9.1 من المعادلة 9.9 وذلك باستخدام العلاقة الاساسية الاتية بين $\{W_n\}$ وتتابع ازمنة التواجد $\{N_k(n)\}$

(9.12) $N_k(w) < n$ اذا كانت $W_n > w$ والعكس صحيح .

لاى عددين صحيحين w, n .استخدم تعاريف المفاهيم المتعلقة لكي تبرهن معادلة 9.12

برهان المعادلة 9.1 :

افرض ان $[x]$ يمثل اكبر عدد صحيح يساوي اواقل من x وان m تمثل $m_{k,k}$. ان

اذا كانت

$$\frac{N_k(w)}{w} - \frac{1}{m} < \epsilon$$

اذا كانت

$$N_k(w) < \left[w\left\{\epsilon + \frac{1}{m}\right\}\right]$$

$$W_{[w\{\epsilon+1/m\}]} > w$$

اذا كانت

$$\frac{1}{\left[w\left\{\epsilon + \frac{1}{m}\right\}\right]} W_{[w\{\epsilon+1/m\}]} - m > \frac{w}{\left[w\left\{\epsilon + \frac{1}{m}\right\}\right]} - m$$

$$> \frac{w}{w\left\{\epsilon + \frac{1}{m}\right\}} - m = \frac{-\epsilon}{\epsilon + \frac{1}{m}}.$$

اذا كانت $\epsilon > 0,\ \delta > 0$ فان من المعادلة 9.9 نحصل على تحقيق لصحة الصيغة اعلاه لجميع قيم w التي اكبرمن عدد صحيح ما N (يعتمد على $\epsilon,\ \delta > 0$) باحتمال يزيد عن $1 - \delta$ (راجع الاحتمالات الحديثة ص 416()). وهكذا فان لكل $\delta > 0, \epsilon > 0$ سيوجد عدد N بحيث

$$P\left[\frac{1}{w}N_k(w) - \frac{1}{m} < \epsilon \quad \text{for all } w > N\right] > 1 - \delta.$$

بنفس الطريقة يمكن اثبات وجود عدد N لكل ϵ ، δ بحيث

$$P\left[\frac{1}{w}N_k(w) - \frac{1}{m} > -\epsilon \quad \text{for all } \quad w > N\right] > 1 - \delta.$$

وهو المطلوب اثباته بالنسبة للمعادلة 9.1 .

على ضوء المعادلة 9.1 ، يكون متوسط زمن التواجد $(1/n)N_k(n)$ عبارة عن تقدير لـ π_k لاجل المناقشات والاسئلة التي تخص الاحصاء الاستنتاجي لمتسلسلات ماركوف . يجب ان نعرف توزيع $N_k(n)$.

نظرية 9C

التقارب الطبيعي لازمنة التواجد :

افرض ان k عبارة عن حالة معاودة ذات زمن عودة له متوسط محدود $m_{k,k}$ ، وتباين محدود $\sigma_{k,k}^2$. ان لكل عدد حقيقي x

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{N_k(n) - (n/m_{k,k})}{\sqrt{n\{\sigma_{k,k}^2/(m_{k,k})^3\}}} \leq x\right] = \Phi(x). \qquad (9.13)$$

تنص المعادلة 9.13 على ان $N_k(n)$ يتبع بصورة تقريبية قانون الاحتمال الطبيعي

بمتوسط .

$$E[N_k(n)] = n\,\frac{1}{m_{k,k}} \qquad (9.14)$$

وتباين

$$\text{Var}[N_k(n)] = n\,\frac{\sigma_{k,k}^2}{(m_{k,k})^3} \cdot \qquad (9.15)$$

يمكن ان نثبت ان المعادلتين 9.14 ، 9.15 تتحقق صحتهابمعنى ان :

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} \frac{1}{n} E[N_k(n)] = \frac{1}{m_{k,k}}, \tag{9.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Var}[N_k(n)] = \frac{\sigma_{k,k}^2}{(m_{k,k})^3}. \tag{9.17}$$

برهان المعادلة 9.13.من المعادلة 9.12 نحصل على

$$P[N_k(w) < n] = P[W_n > w]. \tag{9.18}$$

افرض ان $m = m_{k,k}, \sigma^2 = \sigma_{k,k}^2$ وافرض ان .

$$n(w) = \left[\frac{w}{m} + x\sqrt{\frac{\sigma^2 w}{m^3}}\right]$$

حيث x عبارة عن عدد حقيقي ثابت
يمكن ان نحقق

$$\underset{w\to\infty}{\text{غـا}} \frac{n(w) - (w/m)}{\sqrt{\sigma^2 w/m^3}} = x, \underset{w\to\infty}{\text{غـا}} \frac{w - mn(w)}{\sqrt{\sigma^2 n(w)}} = -x.$$

نحصل من حقيقة ان تتابع ازمنة الانتظار $\{W_n\}$ تحقق نظرية الحد المركزية على ان :

$$\underset{w\to\infty}{\text{غـا}} P\left[\frac{W_{n(w)} - mn(w)}{\sqrt{\sigma^2 n(w)}} > \frac{w - mn(w)}{\sqrt{\sigma^2 n(w)}}\right]$$
$$= \underset{n\to\infty}{\text{غـا}} P\left[\frac{W_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} > -x\right] = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x). \tag{9.19}$$

نحصل من المعادلتين 9.18 ، 9.19 على

$$\underset{w\to\infty}{\text{غـا}} P\left[\frac{N_k(w) - (w/m)}{\sqrt{w\sigma^2/m^3}} < x\right] = \underset{w\to\infty}{\text{غـا}} P\left[\frac{N_k(w) - (w/m)}{\sqrt{w\sigma^2/m^3}} < \frac{n(w) - (w/m)}{\sqrt{w\sigma^2/m^3}}\right]$$
$$= \underset{w\to\infty}{\text{غـا}} P\left[\frac{W_{n(w)} - mn(w)}{\sqrt{\sigma^2 n(w)}} > \frac{w - mn(w)}{\sqrt{\sigma^2 n(w)}}\right]$$
$$= \Phi(x).$$

يجب ان نؤكد ان نتائج هذا البند هي حالات خاصة لنظريات غاية عمليات العد التجديدي (راجع بند 3-5) .

6-10 نظريات غاية الاحتمالات الانتقالية لمتسلسلة ماركوف المحدودة

نثبت في هذا البند ان لكل متسلسلة من متسلسلات ماركوف المعاودة غير المختزلة ذات الدورة 1 وفضاء حالةمحدودة C تكون

$$\underset{n\to\infty}{\text{غــا}}\, p_{j,k}(n) = \frac{1}{m_{k,k}} \quad (10.1)$$
لجميع قيم j, k العائدتين الى C

للحصول على برهان الصيغة اعلاه عندما تكون C غير محدودة راجع كتاب Feller (1957), ص 306 , Chung, (1960) 27

لكي نبرهن معادلة 10.1 في حالة متسلسلة ماركوف المحدودة نثبت ان لكل k عائدة الى C يوجد عدد حقيقي π_k بحيث

$$\underset{n\to\infty}{\text{غــا}}\, p_{j,k}(n) = \pi_k. \quad (10.2)$$

باستخدام البرهان الثاني لمعادلة 8.35, نحصل على ان غاية π_k ستساوي بالضرورة $1/m_{k,k}$.

لكي نبرهن معادلة 10.2, نتبع الخطوات الاتية . افرض ان :

$$M_k(n) = \max_{j\in C} p_{j,k}(n), \; m_k(n) = \min_{j\in C} p_{j,k}(n) \quad (10.3)$$

اللتين تمثلان على التوالي المدخل الاكبر والمدخل الاصغر في العمود k عن اعمدة مصفوفة الاحتمال الانتقالية $P(n)$. بما ان

$$p_{j,k}(n+1) = \sum_{i\in C} p_{j,i}\, p_{i,k}(n) \le M_k(n) \sum_{i\in C} p_{j,i} = M_k(n), \quad (10.4)$$

نحصل على

$$M_k(n+1) \le M_k(n), \; m_k(n+1) \ge m_k(n), \quad (10.5)$$

ان التابع $\{M_k(n)\}$ عبارة عن تابع غير تصاعدي بينما يكون التابع $\{m_k(n)\}$ عبارة عن تابع غير تنازلي . يوجد لهذين التابعين عددين حقيقيين M_k ، m_k بحيث

$$\underset{n\to\infty}{\text{غا}}\, M_k(n) = M_k, \; \underset{n\to\infty}{\text{غا}}\, m_k(n) = m_k. \quad (10.6)$$

اذا اثبتنا ان $m_k = M_k$ فان المعادلة 10.2 ستحقق صحتها وان $\pi_k = m_k = M_k$
لكي نبرهن ان $M_k = m_k,$ نعتبر الفرق في التابع الاتي :

ثم نثبت ان $d_k(n) = M_k(n) - m_k(n)$

$$\underset{n\to\infty}{\text{غا}}\ d_k(n) = 0. \qquad (10.7)$$

نحصل من المعادلة 10.5 على $0 \leq d_k(n+1) \leq d_k(n)$,

بحيث ان $\{d_k(n)\}$ عبارة عن تتابع غيرتصاعدي . لكي نبرهن صحة المعادلة 10.7 نثبت وجود تتابع جزئي $\{d_k(nN), n = 1, 2, \cdots\}$.

يحقق

$$\underset{n\to\infty}{\text{غا}}\ d_k(nN) = 0; \qquad (10.8)$$

حيث N عدد صحيح مثبت

نستخدم حقيقة كون C عبارة عن متسلسلة غيرمختزلة محدودة ذات دورة 1 . من ذلك يتبين وجود عدد صحيح N بحيث يكون لجميع الحالتين $k,\ j$

افرض ان $p_{j,k}(N) > 0.$

$$c = \min_{j,k} p_{j,k}(N)$$

بافتراض ان $0 < c < \frac{1}{2}$. نثبت ان لكل $n = 1, 2, \cdots$ مايلي :

$$d_k((n+1)N) \leq (1-2c)d_k(nN). \qquad (10.9)$$

نحصل من المعادلة 10.9 على

$$d_k(nN) \leq (1-2c)^n d_k(N), \qquad (10.9')$$

التي تقترب الى صفر عند اقتراب n الى ∞.

نبرهن بعد ذلك معادلة 10.9. افرض ان n عدد صحيح . ان لكل حالة i

$$p_{i,k}((n+1)N) = \sum_{r\in C} p_{i,r}(N)\, p_{r,k}(nN). \qquad (10.10)$$

بصورة خاصة ، اختر i بحيث يكون

$$p_{i,k}((n+1)N) = M_k((n+1)N),$$

بعد ذلك اختر q بحيث يكون

$$p_{q,k}(nN) = m_k(nN).$$

ان من المعادلة 10.10 نحصل على

$$\begin{aligned}M_k((n+1)N) &= p_{i,q}(N)p_{q,k}(nN) + \sum_{r\neq q} p_{i,r}(N)\ p_{r,k}(nN)\\ &\le p_{i,q}(N)\ m_k(nN) + M_k(nN) \sum_{r\neq q} p_{i,r}(N)\\ &= p_{i,q}(N)\ m_k(nN) + M_k(nN)\ \{1 - p_{i,q}(N)\}\\ &= M_k(nN) - \{M_k(nN) - m_k(nN)\}\ p_{i,q}(N)\\ &\le M_k(nN) - \{M_k(nN) - m_k(nN)\}\ c.\end{aligned}$$

وهكذا اثبت ان

$$M_k((n+1)N) \le M_k(nN) - \{M_k(nN) - m_k(nN)\}\ c. \qquad (10.11)$$

يمكن ان تثبت بنفس الطريقة ان

$$m_k((n+1)N) \ge m_k(nN) + \{M_k(nN) - m_k(nN)\}c. \qquad (10.12)$$

وذلك باختيار i بحيث يكون $p_{i,k}((n+1)N) = m_k((n+1)N)$ ثم اختر q بحيث يكون $p_{q,k}(nN) = M_k(nN)$

عندما نطرح معادلة 10.12 من المعادلة 10.11, نحصل على

$$M_k((n+1)N) - m_k((n+1)N) \le \{M_k(nN) - m_k(nN)\}\{1-2c\},$$

وهو المطلوب اثباته بالنسبة للمعادلة 10.9. وكذلك المعادلة 10.2

الارجودك الهندسي Geometric ergodicity

بعد تحديد الغايات للاحتمال الانتقالي ، يهمنا بعد ذلك تحديدمعدل التقارب.

يطلق على متسلسلة ماركوف غير المختزلة ذات الدورة I بانها هندسيا ارجودك اذا كان يوجد لكل زوج في الحالات j ، k عددان $M_{j,k}$ و $\rho_{j,k}$ بحيث تكون

$$0 \le M_{j,k} < \infty, 0 \le \rho_{j,k} < 1 \qquad (10.13)$$

وعندما $n = 1, 2, \cdots$ فان

$$|\ p_{j,k}(n) - \pi_k\ | \le M_{j,k}(\rho_{j,k})^n. \qquad (10.14)$$

عرض Kendall (1959), الشروط التي قام ببحثها بصورة موسعة واثبت ايضا تحقيق صحة المعادلة 10.14 اذا كان والعكس صحيح

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n f_{k,k}(n) < \infty \qquad (10.15)$$

. لعدد ما حقيقي محدود $c < 1$ ولحالة ما k عائدة الى متسلسلة ماركـوف .

اثبت Kendall (1960) انه باستخدام المعادلة 10.15 يمكن الحصول على تفاصيل الارجودك الهندسية لمتسلسلات ماركوف لمختلف انظمـــة الانتـــظـــار .

ان برهان المعادلة 10.15 يقع خارج نطاق هذا الكتاب . مع ذلك سنثبت ان متسلسلة ماركوف غير المختزلة ذات الدورة 1 المحدودة هندسيا ارجودك . ان

$m_k(n) \le p_{j,k}(n) \le M_k(n)$ بالفرض .

من المعادلة 10.5 $m_k(n) \le \pi_k \le M_k(n)$

من المتراجحتين اعلاه نحصل على

$$| p_{j,k}(n) - \pi_k | \le M_k(n) - m_k(n).$$

نحصل من المعادلة $10.9'$ على

$$M_k(n) - m_k(n) \le M_0 \rho^n$$

حيث

$$\rho = (1-2c)^{1/N}$$
$$M_0 = d_k(N)(1-2c)^{-1}.$$

وهو المطلوب اثباته

ملحق : تبادل عمليات الغاية :

نحاول في هذا الكتاب تطوير بعض المفاهيم والاساليب الرئيسية لنظرية العمليات التصادفية بدون ان يتطلب الامر حصول القارئ على مؤهلات في الرياضيات المتقدمة . هناك العديد من النظريات المبرهنة باستخدام الاساليب الرياضية .

ان العلاقة بين النظرية الرياضية للاحتمال ونظرية التكامل الحديثة قوية حيث سنوضح بعض الخطوات المهمة لمختلف النظريات الاساسية في نظرية التكامل الحديثة وبصورة خاصة ، نظرية التقارب المهيمنة dominated convergence نتيجة Fubini's ونظرية Fatou's. نذكر هذه النظريات في هذا الملحق للمتواليات غير المحدودة .

بالصيغة غير المحدودة في هذا التلميـح . من خلال التجارب يتبيـــن ان ادراك وفهم هذه النظريات يكون افضل عندما تصاغ من وجهة نظر المتواليات اللامحدودة.

افرض ان $a_n(t)$ عبارة عن دالةضمن المجموعة المقطعة T عندما $n = 1, 2, \cdots$
يمكن ترتيب عناصر T بحيث يمكن ان نفترض ان $T = \{1, 2, \cdots\}$.

نظرية التقارب المهيمنة :

(1) افرض ان : $\underset{n\to\infty}{\text{غـا}}\, a_n(t)$ موجودة لكل t عائدة الى T
افرض ان $B(t)$ عبارة عن دالة ضمن T بحيث .

(2) $|a_n(t)| \leq B(t)$ لكل t عائدة الى T و $n = 1, 2, \cdots,$

(3) $\sum_{t\in T} B(t) < \infty;$

ان

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} \sum_{t\in T} a_n(t) = \sum_{t\in T} \left\{\underset{n\to\infty}{\text{غـا}}\, a_n(t)\right\} \tag{4}$$

البرهان : نفرض ان $a(t) = \underset{n\to\infty}{\text{غـا}}\, a_n(t)$ من المعادلة 2 نجد ان $|a(t)| \leq B(t)$
اذن يتقارب $\sum_{t=1}^{\infty} a(t)$.ان لكل عدد صحيح M

$$\left|\sum_{t=1}^{\infty} a_n(t) - \sum_{t=1}^{\infty} a(t)\right| \leq \sum_{t=1}^{M} |a_n(t) - a(t)| + \sum_{t=M+1}^{\infty} \{|a_n(t)| + |a(t)|\}$$

علاوة على ذلك

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} \sum_{t=1}^{M} |a_n(t) - a(t)| = \sum_{t=1}^{M} \{\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} |a_n(t) - a(t)|\} = 0,$$

$$\sum_{t=M+1}^{\infty} \{|a_n(t)| + |a(t)|\} \leq 2 \sum_{t=M+1}^{\infty} B(t).$$

اذن لكل عدد صحيح M

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} \sup\left|\sum_{t=1}^{\infty} a_n(t) - \sum_{t=1}^{\infty} a(t)\right| \leq 2 \sum_{t=M+1}^{\infty} B(t). \tag{5}$$

جهة المعادلة 5 اليمنى عبارة عن الحد الباقي من المتوالية المتقاربة ولذلك يقترب الى صفر عندما M تقترب الى ∞ .اذن بعد ايجاد غاية المعادلة 5 عندما M تقترب الى ∞ نحصل على

$$\underset{n\to\infty}{\text{غـا}} \sup\left|\sum_{t=1}^{\infty} a_n(t) - \sum_{t=1}^{\infty} a(t)\right| = 0.$$

وهو المطلوب اثباته بالنسبة للمعادلة 4 .

في حالة عدم وجود دالة مهيمنة $B(t)$ فانه يمكن جعل اشارة مساواة المعادلة 4 على شكل متراجحة .

<u>نتيجة Fatou's</u> : افرض صحة تحقيق المعادلة 1 ان

(6) $a_n(t) \geq 0$ لجميع قيم t العائدة الى T و $n = 1, 2, \cdots$

ان

(7) $$\sum_{t \in T} \{\text{غـا}_{n \to \infty} a_n(t)\} \leq \text{غـا}_{n \to \infty} \sum_{t \in T} a_n(t).$$

<u>البرهـــان</u> :

لاي عدد صحيح M سيكون

(8) $$\sum_{t=1}^{M} \text{غـا}_{n \to \infty} a_n(t) = \text{غـا}_{n \to \infty} \sum_{t=1}^{M} a_n(t) \leq \text{غـا}_{n \to \infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_n(t).$$

بعد ايجاد غاية المعادلة 8 عندما تقترب الى ∞ نحصل على المعادلة 7 .

نذكر بعد ذلك (بدون برهان) نظرية يطلق عليها غالبا نظرية Fubini's والتي تخص الشروط التي يمكن وفقها تبديل تسلسل المجموع .

<u>نظرية Fubini's</u>

افرض ان $a_n(t)$ عبارة عن دالة معرفة عندما $n = 1, 2, \cdots$ و $t = 1, 2, \cdots$ لكي يكون

(9) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} a_n(t) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)$$

فانه يجب ان يتحقق على الاقل شرط واحد من الشروط الاتية :

(i) $a_n(t) \geq 0$ لجميع قيم n and t,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} | a_n(t) | < \infty$,

(iii) $\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} | a_n(t) | < \infty$.

الفصل السابع

متسلسلات ماركوف

ذات المعلم المستمر

نناقش في هذا الفصل المبادئ والتطبيقات الاساسية لنظرية متسلسلات ماركوف ذات المعلم المستمر مع التركيز على عمليات الولادة والوفيات

٦-١ نظريات غاية الاحتمالات الانتقالية لمتسلسلات ماركوف ذات المعلم المستمر

نفرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف ذات حالةالفضاء S ولها دالة احتمال انتقالية متجانسة

$$p_{j,k}(t) = P[N(t+s) = k \mid N(s) = j], \tag{1.1}$$

تكون مستمرة عند النقطة $t = 0,$

ان

$$\lim_{t \to 0} p_{j,k}(t) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad j = k \\ 0 & \text{if} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{1.2}$$

تحقق دالة الاحتمال الانتقالي معادلة جابمان كولموكروف لاي من حالتي j $k,$ ولاى عددين موجبين s , t كما في المعادلة

$$p_{j,k}(s+t) = \sum_{\text{states } h} p_{j,h}(s) p_{h,k}(t). \tag{1.3}$$

نعرف ان حالتي j , k بانهما متعادلتان *communicate* عند وجود زمنين t_1 , t_2 بحيث $p_{j,k}(t_1) > 0$ ، $p_{k,j}(t_2) > 0$ لانستطيع اختزال متسلسلة ماركوف الى شكل اخر اذا كانت كل حالتين في المتسلسلة متبادلة .

نستطيع ان نبين من حالتي j $k,$ ان $p_{j,k}(t)$ عبارة عن دالة لـ t عندما $t > 0$ وان هذه الدالة مستمرة بانتظام ، وتساوي صفراً دائما اوموجبة دائما. وهكذافان $p_{j,k}(t) > 0$ لجميع قيم $t > 0$ ولكل الحالات j , k في حالة متسلسلة ماركوف التي لايمكن اختزالها

في حالة متسلسلة ماركوف التي لايمكن اختزالها والتي لها دالة احتمال انتقالي متجانسة $p_{j,k}(l)$ فان الغاية

$$\lim_{l\to\infty} p_{j,k}(l) = \pi_k, \quad k \in S, \tag{1.4}$$

تكون موجودة وغير معتمده على الحالة الابتدائية للمتسلسلة . يمكن برهنة معادلة 1.4 باستخدام الاساليب في البند 10–6 في حالة متسلسلة ماركوف النهائيـــة .

للحصول على البرهان العام ، يراجع القارئ كتاب Chung (1960), ص 178 .

ان الغايات $\{\pi_k, k \in S\}$ كما في حالة متسلسلة ماركوف ذات المعلـــم المتقطع التي لايمكن اختزالها ، تساوي صفراً . اي ان

$$\pi_k = 0 \quad \text{لجميع قيم } k \text{ التي تنتمي الى } S. \tag{1.5}$$

وان جميع تلك الغايات ستكون موجبة ولها توزيع احتمالي : اي ان

$$\pi_k > 0 \quad \text{لجميع قيم } k \text{ التي تنتمي الى } S, \tag{1.6}$$

وان $\sum_{k \in S} \pi_k = 1.$

تعرف متسلسلة ماركوف غير ممكنة الاختزال بانها irreducible chain عبارة عن متسلسلة موجبة معاودة اذا تحققت صحة المعادلة 1.6 . نلاحظ اذا تحققت المعادلة 1.6 فان $\{\pi_k, k \in S\}$ عبارة عن توزيع طويـــــل المـــــدى long-run distribution ، وتوزيع توقفي stationary distribution لمتسلسلة ماركوف (كما معرفة في البند (8–6)

لاجل معرفة وجود توزيع طويل المدى (او توقفي) لمتسلسلة ماركوف غير ممكنـــة الاختزال ذات المعلم المتقطع والتي لها احتمالات انتقالية بخطوة واحدة $\{p_{j,k}\}$ علينا ان نحدد فيما اذا كان لنظام المعادلات

$$\pi_k = \sum_{j \in S} \pi_j \, p_{j,k}, \quad k \in S \tag{1.7}$$

حل مطلق متقارب لايساوي صفراً . ان وجـد مثل هذا الحل فان $\{\pi_k\}$ ستكـــون عبارة عن توزيع طويل المدى (تطبيعه بحيث يكون حاصل المجموع يساوي 1.)

تؤدي الكثافات الانتقالية *transition intensities* المعرفـــة بواسطة مشتقات الدوال الاحتمالية الانتقالية عند النقطة صفر دور الاحتمالات الانتقالات ذات الخطوة الواحدة في حالة متسلسلة ماركوف المستمرة المعلم . افرض ان لكل حالة k ستكون

$$q_k = -\frac{d}{dt} p_{k,k}(0) = \underset{t \to 0}{\text{غـا}} \frac{1 - p_{k,k}(t)}{t} \qquad (1.8)$$

موجودة ولها قيمة محدودة . بينما لكل حالتين j ,k عندما $j \neq k$, فـان

$$q_{j,k} = \frac{d}{dt} p_{j,k}(0) = \underset{t \to 0}{\text{غـا}} \frac{p_{j,k}(t)}{t} \qquad (1.9)$$

موجودة ولها قيمة محدودة

ان للغايتين اعلاه المعنى الاحتمالي الاتي . احتمالات الانتقال ضمن فترة زمنية طولها h تكون بصورة تقريبية متناسبة مع طول h: الاحتمال $1 - p_{j,j}(h)$ للانتقال من حالة ذات حالة ما خلال الفترة الزمنية h يساوي hq_j زائـداً الباقي المقسوم على h الذي يقترب الى صفر (عند اقتراب h الى صفر) . بينما الاحتمال $p_{j,k}(h)$ للانتقال من الحالة j الى الحالة k خلال فترة زمنية طولها h يساوي $hq_{j,k}$ زائداً الباقي المقسوم على h الذي يقترب الى صفر (عند اقتراب h الى الصفر) .

نطلق على q_j كثافة العبور *intensity of passage* اذا اعطيت ان متسلسلة ماركوف في الحالة j نطلق على $q_{j,k}$ كثافة الانتقال *intensity of transition* الى الحالة k, اذا اعطيت ان متسلسلة ماركوف في الحالة j

اذا فرضنا ان s تقترب الى ∞ في معادلة جابمان كولموكروف 1.3 فان التتابع $\{\pi_k, k \in S\}$ يحقق المعادلة

$$\pi_k = \sum_{\text{حالات } h} \pi_h \, p_{h,k}(t), \; k \in S. \quad \text{كل } t \geq 0 \qquad (1.10)$$

اذا فاضلنا المعادلة 1.10 نسبة الى t . واذا غيرنا موقع عمليات الجمع والتفاضل (الذي يمكن تبريره بالافتراضات القوية الكافية حول معدل التقارب لغايات المعادلتين 1.8 . 1.9) فنحصل على ان $\{\pi_k, k \in S\}$ تحقق نظـام المعادلات الخطية . .

$$\pi_k \, q_k = \sum_{h \neq k} \pi_h \, q_{h,k}, \; k \in S. \qquad (1.11)$$

7-2 عمليات الولادة والوفيات وتطبيقها في نظرية صفوف الانتظار

يطلق على متسلسلة ماركوف المستمرة المعلم $\{N(t), t \geq 0\}$ التي لها حالة فضاء $\{0, 1, 2, \cdots\}$ واحتمالات انتقال متجانسة بانها عبارة عن عملية ولادة ووفاة اذا حققت كثافاتها الانتقالية الشروط التالية : اذا علمت ان j ، k عبارة عن حالتين بحيث $|j-k| \geq 2,$ فان

$$q_{j,k} = 0. \tag{2.1}$$

بعبارة اخرى ، ان عملية الولادة والوفاة عبارة عن متسلسلة ماركوف المستمرة المعلم تتغير فقط خلال انتقالها من حالة الى حالة مجاورة لها . نعرف في حالة عملية الولادة والوفاة الكميتين λ_j , μ_j كما يلي :

$$\begin{aligned} \lambda_j &= q_{j,j+1} \quad \text{for} \quad j \geq 0, \\ \mu_j &= q_{j,j-1} \quad \text{for} \quad j \geq 1, \\ \lambda_j + \mu_j &= q_j \quad \text{for} \quad j \geq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

ثم نعرف

$$\mu_0 = 0.$$

بصورة واضحة اكثر

$$\begin{aligned} \underset{h \to 0}{\text{غـــــا}} \frac{p_{n,n+1}(h)}{h} &= \lambda_n \qquad \text{for} \quad n \geq 0, \\ \underset{h \to 0}{\text{غـــــا}} \frac{p_{n,n-1}(h)}{h} &= \mu_n \qquad \text{for} \quad n \geq 1, \\ \underset{h \to 0}{\text{غـــــا}} \frac{1-p_{n,n}(h)}{h} &= \lambda_n + \mu_n \quad \text{for} \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

بعبارة اخرى ، تعني هذه المعادلات انه في اية فترة زمنية صغيرة جداً فان حجم المجتمع (ممثل بـ $N(t)$) اما سيزداد بوحدة واحدة ، اوينقص بوحدة واحدة اويبقى كما هو. الاحتمال المشروط للزيادة بوحدة واحدة (ولادة) يعتمد على حجم المجتمع n ويرمزله بالرمز λ_n . الاحتمال المشروط للنقصان بوحدة واحدة (وفاة) يعتمد على حجم المجتمع n ويرمز له بالرمز μ_n .

سيكون نظام المعادلات 1.11 في حالة عملية الولادة والوفيات كما يلي :

$$\lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1, \tag{2.4}$$

$$(\lambda_n + \mu_n)\pi_n = \lambda_{n-1}\,\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\,\pi_{n+1}, \qquad n \geq 1. \tag{2.5}$$

نحصل من هذه المعادلات على علاقة تعاقبية يمكن استخدامها لاستخراج التتابع $\{\pi_n\}$

$$\mu_n\pi_n = \lambda_{n-1}\,\pi_{n-1} \qquad \text{for} \quad n \geq 1. \tag{2.6}$$

لكي نبرهن معادلة $2.6,$ نعرف

$$\alpha_n = \mu_n\,\pi_n - \lambda_{n-1}\,\pi_{n-1}.$$

من المعادلة 2.5 نستنتج ان $\alpha_n = \alpha_{n+1}$ عندما $n \geq 1$ اذن $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots .$
لكن من المعادلة 2.4 نستنتج ان $\alpha_1 = 0$ اذن $\alpha_n = 0$ عندما $n = 1, 2, \cdots$
وهذا هو المطلوب اثباته

نستطيع ان نعطي توضيحاً مبسطاً لمعادلة 2.6. كما يلي :

$$\pi_{n-1}\,\lambda_{n-1}\,h = P[N(t+h) = n \mid N(t) = n-1]\; P[N(t) = n-1]$$
$$= P[N(t+h) = n \text{ and } N(t) = n-1], \tag{2.7}$$
$$\pi_n\,\mu_n\,h = P[N(t+h) = n-1 \mid N(t) = n]\; P[N(t) = n]$$
$$= P[N(t+h) = n-1 \text{ and } N(t) = n]. \tag{2.8}$$

عندما تكوّن $h,$ كمية موجبة صغيرة وقيم t كبيرة .

اذا كان حجم المجتمع $N(t)$ في توازن احصائي فان احتمال زيادة حجم المجتمع بوحدة واحدة خلال فترة زمنية صغيرة يجب ان يساوي احتمال نقصان حجم المجتمع بوحدة واحدة . لذلك فان الجهة اليمنى من المعادلتين 2.7 . 2.8 متساويتان لجميع قيم $n \geq 1$. وهكذا سنحصل على معادلة 2.6. .

في حالة $\mu_n > 0$ لجميع قيم $n \geq 1$ نحصل من المعادلة 2.6 على تغيير واضح لـ π_n

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\,\frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} \cdots \frac{\lambda_0}{\mu_1}\,\pi_0, \; n \geq 1. \tag{2.9}$$

للحصول على π_0 نستخدم الشرط الاحتمالي التالي :

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \cdots = \pi_0\left\{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1} + \cdots\right\}. \tag{2.10}$$

نستطيع ان نبرهن (راجع مثلا Karlin و McGregor سنة [1957])

ان لعملية الولادة والوفيات توزيع طويل المدى اذا كانت المتوالية اللانهائية في المعادلة 2.10 متقاربة .

بالاستطاعة اعطاء صورة واضحة ومعقولة للصيغة الاخيرة وذلك بتقريب عملية الولادة والوفيات بالمشية العشوائية . افرض اننا لاحظنا عملية ماركوف المستمرة المعلم $\{N(t), t \geq 0\}$ عند تتابع من اللحظات الزمنية المتقطعة . اللحظة الزمنية مابين تتابع وآخر تساوي h حيث نلاحظ التتابع

$$X_n = N(nh), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.11}$$

ان X_n عبارة عن متسلسلة ماركوف متقطعة المعلم . اذا كانت $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية ولادة ووفاة فانه يمكن ان تعتبر $\{X_n\}$ عبارة عن مشية عشوائية ذات مصفوفة احتمال انتقالية تعطى بالمعادلة 6.10 في الفصل السادس .

حيث $p_0 = \lambda_0 h,\ r_0 = 1 - \lambda_0 h.$ وعندما $n \geq 1$ فان

$$q_n = \mu_n h,\ p_n = \lambda_n h,\ r_n = 1 - (\lambda_n + \mu_n)h. \tag{2.12}$$

لنفرض ان $\rho_0 = 1$ ولنفرض عندما $m \geq 1$ ان

$$\rho_m = \frac{q_1 \cdots q_m}{p_1 \cdots p_m} = \frac{\mu_1 \cdots \mu_m}{\lambda_1 \cdots \lambda_m}.$$

حسب الجدول 6.6, فان المشيات العشوائية ستكون معاودة موجبة اذا كان $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p_m \rho_m} < \infty,$ والعكس صحيح الذي يماثل المجموع

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p_m \rho_m} = \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots\right\} < \infty,$$

حيث تتحقق صحة المجموع اذا كانت المتوالية اللانهائية في المعادلة 2.10 متقاربة .

مثال 2A

مشاكل حركة المرور التلفونية

اعتبر دائرة اتصالات تلفونية . افرض ان المشتركين يقومون بطلب نداءات عند الفترات الزمنية $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n, \cdots$ حيث ان $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \infty$

نفترض ان الازمنة مابين الوصول المتتابع $T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_2 - \tau_1, T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, \cdots$ عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة موزعة توزيعاً اسياً بمتوسط $1/\lambda$ الفترة الزمنية للحادثة المبتدئة (عبارة عن طول الفترة الزمنية التي يبقى الخط فيها مشغولاً) بالنداء الواصل عند الزمن τ_n عبارة عن متغيرعشوائي ، يرمزله بالرمز S_n ويسمى برمزالانشغال *holding time* (اوزمن الخدمة) للنداء رقم n . ازمنة الخدمة المتتابعة (او الفترات) $S_1, S_2, \cdots$ يفترض انها متغيرات عشوائية مستقلة موزعة بصورة اسية بمتوسط $1/\mu$ (عند دراسة فترات النداءات التلفونية المحلية سنة 1837 في نيوجرسي ، مولينا سنة 1927 وجد ان هذه الفترات موفقة بصورة جيدة بالتوزيع الاسي) .

يتم ربط النداء الواصل ان وجد خط غيرمشغول (بدء الحادثة) . ان عدد الخطوط المتاحة اما ان تكون ذات عدد نهائي او ∞ في حالة وجود عدد نهائي من الخطوط في الاتصالات التلفونية فانه بالامكان اتخاذ الافتراضين اللذين يخصان طبيعة النداءات الواصلة عندما تكون جميع الخطوط مشغولة . اما ان تشكل هذه النداءات نظام انتظار (بمعنى ان كل نداء جديد يوصل ينتظرفي صف انتظار الى ان تكون احد الخطوط غيرمشغولة) . اوأن النداءات لاتكون نظام انتظار (تغادر حالا عندما تكون جميع الخطوط مشغولة) . الافتراض الذي يخص العدد اللانهائي من الخطوط ولوانه غيرعملي الا انه يستحق الاعتبار لانه يجعل الموضوع اكثروضوحاً لاجل التصميم الصحيح للاتصالات التلفونية ذات العدد النهائي من الخطوط .

لنفرض ان $N(t)$ تمثل عدد الخطوط المشغولة عند الزمن t في الاتصالات التلفونية ذات العدد النهائي من الخطوط باستخدام اسلوب صفوف الانتظار نستطيع ان نعتبرمجموعة الخطوط المشغولة بانها صف انتظاروان $N(t)$ ستكون طول ذلك عند الزمن t . حسب الافتراضات $\{N(t), t \geq 0\}$ ستكون عبارة عن عملية ولادة ووفيات مع كثافات انتقالية (عندما $n = 0, 1, \cdots$)

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = n\mu, \tag{2.13}$$

حيث $1/\lambda$ عبارة عن المتوسط الزمني مابين وصول الزبائن ، و $1/\mu$ عبارة عن المتوسط الزمني لخدمة الزبون . بعبارة اخرى ، احتمال وجود خط واحد في صف الانتظار في فترة زمنية صغيرة طولها h يساوي تقريباً λh مهما كان عدد الخطوط في صف الانتظار

من جهة اخرى ، ان احتمال مغادرة خط واحد فقط لصف الانتظار اذا علمت

وجود n خط في صف الانتظار سيساوي $n\mu h$ تقريباً. احتمال تغير حجم صف الانتظار بمقدار اكثر من وحدة واحدة في فترة زمنية صغيرة طولها h يساوي كمية صغيرة جداً يمكن اهمالها اي جعلها تساوي صفر.

نبرهن الحالات المذكورة اعلاه كمايلي : ان العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف وان برهانها قد يبدو صعباً لكنه بأستخدام خاصية التوزيع الاسي نستطيع ان نبرهن ذلك بسهولة.

لو اعتبرنا صف انتظار عند نقطة زمنية معلومة ، فان اي تغيير حدث على ذلك الصف قبل تلك النقطة الزمنية المعلومة ليس له اي تأثير على قانون احتمال وصول الوحدات او مغادرتها بعد تلك النقطة الزمنية.

نستطيع ان نبرهن كون الكثافات الانتقالية لمتسلسلة ماركوف $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن نوع من انواع الولادة والوفاة وانها تحقق معادلة 2.13 كمايلي :

افرض ان I عبارة عن فترة زمنية طولها h ونفرض ان $o(h)$ عبارة عن كمية معتمدة على h اذا تم تقسيمها على h. فانها تقترب الى صفر عند اقتراب h الى صفر. ان

$$p_{n,n+1}(h) = P \quad [\ I \text{ احتمال وصول نداء جديد خلال }] + o(h)$$

$$= \lambda h + o(h),$$

$$p_{n,n-1}(h) = P\ [\ I \text{ احتمال انتهاء مكالمة تلفونية واحدة خلال }] + o(h)$$

$$= n(1 - e^{-\mu h})e^{-(n-1)\mu h} + o(h)$$

$$= n\mu h + o(h).$$

من هذه المعادلات نستنتج معادلة 2.13 .

على ضوء المعادلة 2.9, فان الاحتمالات طويلة المدى تكون كما يلي عندما قيم $n \geq 1$

$$\pi_n = \underset{t\to\infty}{\text{غـا}}\ P[N(t) = n] = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0. \tag{2.14}$$

نستخرج π_0 كما يلي :

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \pi_0\, e^{(\lambda/\mu)}. \tag{2.15}$$

اذن

$$\pi_n = e^{-\rho}\,\frac{\rho^n}{n!} \tag{2.16}$$

حيث ρ متوسط طول صف الانتظار $= \frac{\lambda}{\mu}$

$$\rho = \frac{\text{متوسط زمن الخدمة}}{\text{متوسط الزمن مابين وصول الوحدات}} \qquad (2.17)$$

بعبارة ثانية $N(t)$ عبارة عن توزيع بواسون بمتوسط يساوي ρ, على المدى الطويل . لقد بينا في البند 5–4 ان هذه النتيجة تبقى صحيحة في حالة التوزيع الزمني العام للخدمة والتوزيع الاسي للزمن مابين وصول الوحدات .

مثال 2B

صيغة ارلارك للفقدان

افرض ان $N(t)$ عبارة عن عدد الخطوط التلفونية المشغولة في دائرة الاتصالات التلفونية التي يوجد فيها عدد محدود من الخطوط M وان النداء القادم عندما تكون جميع الخطوط مشغولة سيفقد . اي ليس هناك صف انتظار حسب الافتراضات في المثال 2A نستنتج ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية ولادة ووفاة ذات كثافات احتمالية كما يلي :

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, M-1, \\
&= 0, \quad n \geq M; \\
\mu_n &= n\mu, \quad n = 1, 2, \cdots, M, \\
&= 0, \quad n > M.
\end{aligned}$$

يتضح من ذلك ان توزيع $N(t)$ الاحتمالي الطويل المدى يكون عبارة عن توزيـــع بواسون السكاني :

عندما $n = 0, 1, 2, \cdots, M$ فان

$$\pi_n = \lim_{t\to\infty} P[N(t) = n] = \frac{e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{M} e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}} = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{M}\left\{\frac{\rho^n}{n!}\right\}} \qquad (2.19)$$

حيث ρ تعطى بالمعادلة 2.17 . يطلق اصطلاح صيغة ارلارك للفقدان للمعادلة 2.19 نسبة الى العالم A. K. Erlang الذي يعتبر احد باحثي نظرية صفوف الانتظار (راجع Brockmeyer, Halstroem, Jensen [1948]) واضيفت بحوث أخرى من قبل Sevastyanov (1957)

مثال 2C

الاحتمالات التوقفية Stationary probabilities لصف انتظار ذي عدد محدود من القنوات الخدمية .

كتطبيق لنظريات الغاية للاحتمالات الانتقالية لعملية الولادة والوفيات . نقوم بايجاد الاحتمالات التوقفية لطول صف الانتظاروزمن انتظار للحصول على خدمة في نظام يحتوي على عدد محدود M من القنوات الخدمية . حيث تقدم الخدمة للزبائن حسب الاسبقية في الوصول اما الزبائن الذين يصلون والقنوات الخدمية مشغولة فسينتظرون للحصول على الخدمة . افرض ان الازمنة المتتابعة مابين وصول زبون واخرمستقلة وموزعة حسب التوزيع الاسي وبمعدل $1/\lambda$, وان ازمنة الخدمة المتتابعة مستقلة وموزعة حسب التوزيع الاســـي وبمعدل $1/\mu$. لنفرض ان $N(t)$ تمثل عدد الزبائن في صف الانتظار او الذين تقدم لهم الخدمة . نستطيع ان نبين ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية ولادة ووفاة حيث

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, \cdots$$
$$\mu_n = n\mu, \quad n = 0, 1, \cdots, M-1$$
$$= M\mu, \ n \geq M.$$

تعطي الاحتمالات الانتقالية $\pi_n = \underset{t\to\infty}{\text{غـا}}\, P[N(t) = n]$ ان وجدت بالصيغة

$$\pi_n = \pi_0 \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \ n \leq M$$
$$= \pi_0 \frac{M^M}{M!}\left(\frac{\lambda}{M\mu}\right)^n, \ n \geq M.$$

نستخرج قيمة π_0 باستخدام الشرط الاتي :

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \pi_0\left(\sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{M^M}{M!}\sum_{n=M}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{M\mu}\right)^n\right). \tag{2.20}$$

المتوالية اللانهائية في المعادلة 2.20 تتقارب اذا كانت

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu} < 1. \tag{2.21}$$

والعكس صحيح

اذا لم تتحقق صحة المعادلة 2.21 فان التوزيع التوقفي لاتوجد له قيمة حقيقية . في هذه الحالة $\pi_n = 0$ لجميع قيم n اي ان صف الانتظارسيصبح كبير . اما اذا تحققت

صحة المعادلة 2.21 فان التوزيع طويل المدى $\{\pi_n\}$ ستكون له قيمة حقيقيـــة تعطى بالصيغة

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M-1} \frac{(M\rho)^n}{n!} + \frac{(M\rho)^M}{M!(1-\rho)}},$$

$$\pi_n = \pi_0 \frac{(M\rho)^n}{n!}, \; n = 0, \cdots, M,$$

$$\pi_n = \pi_M \rho^{n-M}, \quad n \geq M+1. \tag{2.22}$$

انلحالة القناة الخدمية المفردة اهمية خاصة . عندما $M = 1$ فان الاحتمـــالات التوقفية لحجم صف الانتظار عبارة عن توزيع هندسي

$$\pi_0 = 1 - \rho,$$
$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 1. \tag{2.23}$$

نجد بعد ذلك التوزيع التوقفي للعملية التصادفية $\{W(t), t \geq 0\}$ حيث $W(t)$ تمثل المدة الزمنية منذ وصول الزبون عند الزمن t الى ان تبدأ خدمته .

نبرهن في حالة $y > 0$ ان

$$\underset{t\to\infty}{\text{غـــا}} P[W(t) \geq y] = \pi_M \left(\frac{1}{1-\rho}\right) e^{-(1-\rho) M\mu y}, \tag{2.24}$$

وان

$$\underset{t\to\infty}{\text{غـــا}} P[W(t) > 0] = \lim_{t\to\infty} \{1 - P[W(t) = 0]\} = \pi_M \left(\frac{1}{1-\rho}\right) \cdot \tag{2.25}$$

بعبارة اخرى عندما تكون قيم t, كبيرة . فان زمن الانتظار للحصول على خدمــة ستكون له توزيع مختلط . كتلة احتمال موجب عند النقطة صفراما من جانب اخرفسيكون موزعا توزيعا اسيا .

ان صحة تحقيق المعادلة 2.25 واضح والسبب لان

$$P[W(t) > 0] = P[N(t) \geq M] \to \sum_{n=M}^{\infty} \pi_n = \pi_M \left(\frac{1}{1-\rho}\right) \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

عندما تقترب t, الى ∞ .

لـكي ببرهن معادلة 2.24, نحدد اولا التوزيع المشروط لـ $W(t)$. اذا علمنـــا $N(t) = m$ وان t كبيرة جدا .

اذا كانت $N(t) = M,$ فان الزبون الواصل عند الزمن t يجد M زبون في صف الانتظار تقدم لهم الخدمة . ان زمن انتظاره للحصول على خدمة سيكون عبارة عن اصغر الازمنة التي يستغرقها كل من الزبائن الذين تقدم لهم الخدمة .إن اصغر زمن خدمة موزع حسب التوزيع الاسي وبمتوسط $1/M\mu.$. وعلى هذا الأساس فان

$$P[W(t) \geq y \mid N(t) = M] = \int_y^\infty M\mu e^{-M\mu x}\, dx.$$

اذا كانت $N(t) = M + n,$ لبعض قيم $n \geq 1$ فان الزبون الواصل سيجد $M + n$ زبون في صف الانتظار . زمن الانتظار سيكون مجموع $(n + 1)$ متغيراً عشوائياً مستقلاً كل منهما يمثل الزمن الذي يستغرقه كل من الـ M من القنوات الخدمية المشغولة حتى تصبح غير مشغولة وكل منهما موزع حسب التوزيع الاسي بمتوسط $1/M\mu$. بناء على ذلك اذا علمت ان $N(t) = M + n$ فان $W(t)$ موزع حسب توزيع كاما :

$$P[W(t) \geq y \mid N(t) = M + n] = \int_y^\infty M\mu \frac{(M\mu x)^n}{n!} e^{-M\mu x}\, dx.$$

لذلك ، عندما $y > 0,$

$$P[W(t) \geq y] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N(t) = M + n] \int_y^\infty M\mu \frac{(M\mu x)^n}{n!} e^{-M\mu x}\, dx.$$

عندما تكون قيم $t,$ كبيرة

$$P[N(t) = M + n] \doteq \pi_M \rho^n.$$

ونتيجة لذلك عندما تكون قيم $t,$ كبيرة و $y > 0$ فان

$$P[W(t) \geq y] \doteq \pi_M \frac{1}{1-\rho} e^{-(1-\rho) M\mu y}$$

وهذا هو البرهان المطلوب بالنسبة للمعادلة 2.24 . كمقياس لفعالية الاجهزة الخدمية تستخدم النسبة التالية .

$$R = \frac{\text{متوسط زمن انتظار الزبون}}{\text{متوسط زمن خدمة الزبون}} \qquad (2.26)$$

يطلق على R نسبة الضياع للزبون وهي تمثل نسبة الزمن الضائع بالنسبة للزبون في صف الانتظار الى الزمن الذي تستغرقه خدمة الزبون .

يساوي البسط في المعادلة 2.26 عندما تكون t كبيرة تقريباً مايلي :

$$E[W(t)] = P[W(t) > 0] \int_0^\infty y(1-\rho)M\mu\, e^{-(1-\rho)M\mu y}\, dy$$
$$= \frac{P[W(t) > 0]}{M\mu(1-\rho)},$$

بينما المقام في المعادلة 2.26 يساوي $1/\mu$. وبهذا ستعطي نسبة الضياع للزبون ، بالصيغة (t كبيرة) الآتية :

$$R = \frac{P[W(t) > 0]}{M(1-\rho)} = \frac{\pi_M}{M(1-\rho)^2}. \qquad (2.27)$$

ان R دالة لـ M ، ρ فقط . اذا رسمنا R كدالة لـ ρ (بافتراض قيمة معلومة الى M) يتبين انه كلما ρ تقترب من 1 فان R تقترب الى ρ .

يطلق على الكمية R بمعامل المنفعة utilization factor للنظام لان $1-\rho$ مقياس لنسبة الوقت الذي تكون فيه القنوات الخدمية غير مشغولة (لايوجد زبون في صف الانتظار) .

لاجل تقليل نسبة الضياع للزبون على الادارة ان نسمح بكمية معقولة من الزمن تكون فيها القناة الخدمية غير مشغولة حيث ان الطلب على الخدمة يحدث بصورة عشوائية ومدة الخدمة ايضاً عشوائية بدلاً من محاولة جعل عامل المنفعة يقترب الى 1 مثلاً)، في محطة ذات اربع قنوات خدمية مع عامل منفعة 90% نسبة الضياع للزبون ستكون 200% اذا وضعنا قناة اخرى فان عامل المنفعة يقل الى72 وان نسبة الضياع للزبون اقل من 10% .

التمارين

تصليح المكائن

2.1 اعتبر M ماكنة اوتوماتيكية يقوم بتصليحها مصلح واحد . اذا كانت الماكنة صالحة للعمل عند الزمن t فان احتمال عطبها سيكون $\mu h + o(h)$ تصلح الماكنة العاطلة فوراً مالم يكن المصلح مشغولاً بتصليح ماكنة اخرى حيث في هذه الحالة ستكون الماكنة العاطلة صف انتظار . الزمن المستغرق لتصليح ماكنة موزع بصورة اسية وبمتوسط 1/٨. لتكن $N(t)$ عبارة عن عدد المكائن الصالحة للعمل عند الزمن t المطلوب ايجاد التوزيع الاحتمالي طويل المدى لـ $N(t)$

2.2 يقدم الطعام الى مجموعة من الفئران تتكون من N فأرة بكميات كبيرة ان وجدت فأرة عند الزمن t، تأكل الطعام ، فان احتمال تركها للطعام عند الزمن $t+h$ يساوي $\mu h + o(h)$. اما اذا وجد ان الفأرة عند الزمن t لاتأكل الطعام فان احتمال اكلها للطعام عند الزمن $t+h$ يساوي $\lambda h + o(h)$ يكون اكل الفئران للطعام مستقلاً عن بعضهما الآخر . نفرض ان $N(t)$ عبارة عن عدد الفئران التي تأكل الطعام عند الزمن t اوجد ما يلي :

(i) التوزيع الاحتمالي طويل المدى لـ $N(t)$

(ii) الاحتمال الطويل المدى لوجود اكثر من نصف عدد الفئران تأكل الطعام اذا علمت ان $N = 10$, $\lambda = 60$, $\mu = 30$

2.3 صفوف الانتظار وحالة الزبائن الذين لايتحملون الانتظار

افترض نظاما يحتوي على M قناة خدمية وان ازمنة الوصول مابين زبون واخر وازمنة الخدمة موزعة حسب التوزيع الاسي وبمعدل $1/\lambda$ ، $1/\mu$ على التوالي . لنفرض ان $N(t)$ عبارة عن حجم النظام عند الزمن t افرض ان β تمثل احتمال انتظار الزبون عندما يكون حجم صف الانتظار يساوي M او اكبر . اوجد مايلي :

(i) $\pi_n = \underset{t\to\infty}{\text{غـا}} P[N(t) = n].$

(ii) التوزيع التوقفي لزمن الانتظار الى ان نبدأ بالخدمة افرض في التمارين 2.4 الى 2.6 وجود M قناة خدمية تبدأ الخدمة حسب الاسبقية حيث ان الازمنة مابين وصول زبون واخر موزع حسب التوزيع الاسي وبمعدل $1/\lambda$ وان ازمنة الخدمة موزعة حسب التوزيع الاسي وبمعدل $1/\mu$ في كل حالة . اوجد الحالة التوقفية .

(i) احتمال انتظار الزبون

(ii) متوسط طول النظام .

(iii) متوسط طول صف الانتظار

(iv) متوسط زمن الانتظار الشرطي للزبون الذي يجب ان ينتظر

(v) احتمال انتظار الزبون اكثر من 2 دقيقة قبل ان يحصل على الخدمة.

(vi) متوسط زمن الانتظار في النظام

(vii) نسبة متوسط زمن انتظار الزبون للحصول على خدمة الى متوسط طول زمن خدمته

(viii) احتمال وجود 2 زبون او اكثر في صف الانتظار .

2.4 افرض ان $M = 1$ وان $\lambda = 18, \quad \mu = 20,$ (ب) $\lambda = 18$, $\mu = 30.$

2.5 افرض ان $\lambda = 18$, $\mu = 20,$ وان (أ) $M = 1$ $\quad M = 2$

2.6 افرض ان $\lambda = 18,$ وان $\mu = 20$ $\quad$ (b) $M = 1, \quad \mu = 9, \quad M = 2$

2.7 افرض نظاما خدميا (في الحالة التوقفية) حيث ازمنة مابين وصول زبون واخر وازمنة الخدمة موزعة حسب التوزيع الاسي . افرض ان معدل الوصول ثابت اقترح هل يكون النظام الخدمي ذا قناة خدمية واحدة او ذا قناتين على ضوء نسبة الضياع للزبون في الحالتين اذا علمت ان معدل خدمة القناة الواحدة ضعف خدمة كل قناة من قنوات النظام ذي القناتين .

2.8 محطة تأجير سيارات . تخصص سيارات الاجرة في بعض المحطات لنقل الزبائن في تلك المحطة الى الموقع المطلوب . وصول سيارات الأجرة وتوافد الزبائن يتبع عمليات بواسون وبمعدل 1.25. في الدقيقة – سيارة الاجرة الواصلة الى المحطة تنتظر مهما كان عدد سيارات الاجرة في الخط اما بالنسبة للزبون فانه سينتظر فقط في حالة وجود 2 زبون او اقل في حالة انتظار . اوجد

(i) متوسط عدد سيارات الاجرة في الخط .

(ii) متوسط عدد الزبائن في حالة الانتظار .

(iii) متوسط عدد الزبائن الذين سيتركون المحطة (عدم الانتظار) بسبب وجود 3 زبائن في حالة الانتظار في الساعة .

7-3 معادلات كولموكروف التفاضلية لدالة الاحتمال الانتقالي :

للحصول على دالة الاحتمال الانتقالية لسلسلة ماركوف ذات المعالم المستمرة نجد حلول مجموعة من المعادلات التفاضلية لدالة الاحتمال الانتقالية سنحصل على المعادلات التفاضلية لمتسلسلات ماركوف غير المتجانسة $\{N(t), t \geq 0\}$ ولها دالة الاحتمال الانتقالية التالية :

$$p_{j,k}(s,t) = P[N(t) = k \mid N(s) = j] \tag{3.1}$$

معرفة لاي حالة j ، k وان $t > s \geq 0.$

نفرض الافتراضات التالية : لكل حالة j توجد دالة مستمرة غيرسالبة $q_j(t)$ تعرف بالغاية التالية :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{1 - p_{j,j}(t, t+h)\} = q_j(t) \tag{3.2}$$

ولكل حالتين j ، k (حيث $j \neq k$) توجد دالة غيرسالبة مستمرة $q_{j,k}(t)$ تعرف بالغاية التالية :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \, p_{j,k}(t, t+h) = q_{j,k}(t). \tag{3.3}$$

للدوال اعلاه بعض التفسيرات الاحتمالية التالية :

الاحتمالات الانتقالية ضمن فترة من الزمن طولها h تتناسب بصورة متقاربة مع h

ان الاحتمال الانتقالي $1 - p_{j,j}(t+h)$ من الحالة j الى حالة اخرى خلال ، الفترة الزمنية $t,$ الى $t+h$ تساوي $hq_j(t)$ زائداً الباقي مقسوماً على $h,$ والذي يقترب الى صفر (عندما h تقترب الى الصفر) . بينما الاحتمال $p_{j,k}(t, t+h)$ للانتقال من الحالة j الى k خلال الفترة الزمنية $(t, t+h)$ يساوي $hq_{j,k}(t)$ زائداً الباقي مقسوماً على $h,$ والذي يقترب الى الصفر عندما تقترب h الى صفر .

يطلق على $q_j(t)$ بكثافة العبور *intensity of passage* اذا كانت متسلسلة ماركوف في الحالة j عند الزمن $t.$ بينما يطلق على $q_{j,k}(t)$ بكثافة الانتقال الى الحالة $k,$ اذا كانت متسلسلة ماركوف في الحالة j عند الزمن $t.$.

يقال ان دوال الكثافة $q_j(t)$ ، $q_{j,k}(t)$ متجانسة اذا – كانت تلك الدوال غير معتمدة على t وكما يلي :

$$\begin{aligned} q_j(t) &= q_j, \\ q_{j,k}(t) &= q_{j,k}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

دوال الكثافة لمتسلسلة ماركوف المتجانسة تكون متجانسة بصورة واضحة .

مثال 3A

عملية التوقف عن العمل :

افرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عدد الوحدات التي توقفت عن العمل في نظام معين وتم استبدالها في الفترة الزمنية صفر الى t .
افرض ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارةعن متسلسلة ماركوف التي لهاحالة فضاء $\{0, 1, 2, \cdots\}$.

لدالة الكثافة $q_n(t)$ المعنى الاتي : $q_n(t)h$ تساوي تقريباً احتمال توقف وحدةواحدة او اكثرمن وحدات النظام عن العمل في الفترة الزمنية من t الى $t+h$.
بصورة عامة نتوقع ان تعتمد $q_n(t)$ على n وعلى t, لان n تمثل عدد الوحدات التي توقفت عن العمل سابقاً و t تمثل طول الفترة الزمنية لبقاء النظام بصورة صحيحة .
الصيغة المناسبة لـ $q_n(t)$ والتي يمكن ان تستخدم في الحصول على خصائص متسلسلة ماركوف $\{N(t), t \geq 0\}$ هي كما يلي :

$$q_n(t) = \frac{a+bn}{c+dt}, \tag{3.5}$$

حيث a ، b ، $d \geq 0$ ، $c > 0$ وانها كميات ثابتة يجب ان تحدد . اذا افترض ان $d = 0$ فان دالة الكثافة $q_n(t)$ ستكون متجانسه .

نستطيع ان نكتب بصورة مناسبة الافتراضين 3.2 ، 3.3 على شكل مصفوفـــة .
افرض اننا نعرف المصفوفة $A(t)$ كما يلي :

$$\begin{aligned} a_{j,k}(t) &= q_{j,k}(t) \quad \text{if} \quad j \neq k, \\ &= -q_j(t) \quad \text{if} \quad j = k. \end{aligned} \tag{3.6}$$

نعرف المصفوفة I كما هو معتاد بالتعريف الاتي :

$$I = \{\delta_{j,k}\}, \ \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad j = k \\ 0 & \text{if} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{3.7}$$

اذن نستطيع ان نكتب معادلتين 3.2 ، 3.3 على شكل مصفوفة وكما يلي :

$$\frac{1}{h}\{P(t,t+h) - I\} \to A(t) \quad \text{عندما } h \to \text{صفر} \tag{3.8}$$

باستخدام الافتراض 3.8 ومعادلة جابمان – كولموكروف نحصل على مجموعة من المعادلات التفاضلية لدوال الاحتمال الانتقالية $p_{j,k}(s,t)$. تشتق بصورة اساسية هذه المعادلات اولا على شكل مصفوفة باستخدام معادلات جابمان كولموكروف نكتب مايلي :

$$\begin{aligned} P(s,t+h) &= P(s,t)\, P(t,t+h) \\ \frac{1}{h}\{P(s,t+h)-P(s,t)\} &= \frac{1}{h}P(s,t)\,\{P(t,t+h)-I\}. \end{aligned} \qquad (3.9)$$

افرض ان h تقترب في المعادلة 3.9 الى صفر . باستخدام المعادلة 3.8 يتبين ان الجهة اليمنى من معادلة 3.9 تقترب الى

$$P(s,t)\ A(t)$$

افرض بعد ذلك ان المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial}{\partial t}P(s,t) = \left\{\frac{\partial}{\partial t}\,p_{j,k}(s,t)\right\} \qquad (3.10)$$

لها قيم حقيقية . ان الجهة اليسرى في المعادلة 3.9 تقترب الى المعادلة 3.10 . وهكذا سنحصل لـكل $t > s \geq 0,$ على مايلي :

$$\frac{\partial}{\partial t}P(s,t) = P(s,t)\ A(t), \qquad (3.11)$$

والتي يمكن ان تكتب عندما $t > s \geq 0$ ولحالتين j ، k كما يلي

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}p_{j,k}(s,t) &= \sum_i p_{j,i}(s,t)\ a_{i,k}(t) \\ &= -q_k(t)\ p_{j,k}(s,t) + \sum_{i\neq k} p_{j,i}(s,t)\ q_{i,k}(t). \end{aligned} \qquad (3.12)$$

من جانب اخر نستطيع ان نكتب :

$$\begin{aligned} P(s-h,t) &= P(s-h,s)\ P(s,t), \\ \frac{1}{h}\{P(s,t)-P(s-h,t)\} &= \frac{1}{h}\{I-P(s-h,s)\}\ P(s,t). \end{aligned} \qquad (3.13)$$

افرض ان

$$\frac{\partial}{\partial s}P(s,t) = \left\{\frac{\partial}{\partial s}\,P_{j,k}(s,t)\right\} \qquad (3.14)$$

عبارة عن مصفوفة المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغير الزمني s الاول اذا فرضنا ان h تقترب الى الصفر في المعادلة 3.13 سنحصل على

$$\frac{\partial}{\partial s}P(s,t) = A(s)\, P(s,t), \qquad (3.15)$$

والتي يمكن ان تكتب عندما $t \geq s > 0$ ولحالتين j ، k كمايلي :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}p_{j,k}(s,t) &= \sum_i a_{j,i}(s)\, p_{i,k}(s,t) \\ &= -q_j(s)p_{j,k}(s,t) + \sum_{i \neq j} q_{j,i}(s)\, p_{i,k}(s,t). \end{aligned} \qquad (3.16)$$

تم اشتقاق نظامي المعادلات التفاضلية 3.12 ، 3.16 لدوال الاحتمالات الانتقالية لتسلسلة ماركوف اولاً من قبل العالم Kol mogorov (1931) في بحث اساسي . ان النظام 3.12 يطلق عليه *Kolmogorov's forward equation* لانه يتعلق بتفاضل الاحتمالات نسبة للزمن الثاني t بينما يطلق على نظام 3.16 *Kolmogorov'sbackward equation* لانه يتعلق بتفاضل الاحتمالات نسبة الى الزمن الاول s (الزمن السابق) .

يجب ان نلاحظ انه بالرغم من وجود رموز المشتقات الجزئية في المعادلتين 3.12 ، 3.16, فان نظام المعادلتين في الحقيقة ليس نظام تفاضل جزئي . بل انهما معادلتـــا تفاضل عادية لانه في المعادلة 3.12 ، j ، s لم يكونا متغيـران لـكنهما معلمان ثابتــان بينما في المعادلة 3.16 يكون t ، k معالم ثابتة وليس بمتغيرات . تظهر المعالم فـــي الشروط الابتدائية فقط .

فمثلاً المعادلة 3.12, يكون

$$\begin{aligned} p_{j,k}(s,t) &= 1 \quad \text{if} \quad t = s,\ k = j \\ &= 0 \quad \text{if} \quad t = s,\ k \neq j, \end{aligned} \qquad (3.17)$$

بينما المعادلة 3.16, يكون

$$\begin{aligned} p_{j,k}(s,t) &= 1 \quad \text{if} \quad s = t,\ j = k \\ &= 0 \quad \text{if} \quad s = t,\ j \neq k. \end{aligned} \qquad (3.18)$$

ظهرت خلال اشتقاق المعادلات السابقة الـكثير من الاسئلة التي لم نحصل الاجابة عليها . اذا افترضنا وجود قيم حقيقية لدوال الـكثافة $q_j(t)$ ، $q_{j,k}(t)$, فاننا نجد الاشتقاق بصورة اساسية لنظامي المعادلات التفاضلية 3.12 ، 3.16. نستطيع ان نحقق صحة معادلات 3.12 اذا – افترضنا بالاضافة الى معادلتي 3.2 ، 3.3 مايلـــي : عندما يكون k, ثابتاً فان العبور للغاية في المعادلة 3.3 سيكون منتظماً نسبة الى j . يمكن ان نثبت تحقيق صحة المعادلة 3.16 باستخدام المعادلتين 3.2 ، 3.3 بدون اي افتراض

آخر (راجع (Feller [1957], p. 427 لهذا السبب تعتبر معادلة (3.16) إساسية اكثر مــن معادلة 3.12 في نظرية متسلسلات ماركوف . بينما تكون المعادلة 3.12 اسهل فهماً من المعادلة 3.16 . ان استخدام المعادلة 3.12 اسهل من ناحية الحصول على نتائج دقيقــة لان اشتقاقها يحتاج الى افتراضات اقل من المعادلة 3.12

توجد عدة اسئلة تخص دالتي الكثافة $q_j(t)$ ، $q_{j,k}(t)$

(i) هل لدوال الكثافة التي تحقق معادلتي 3.2 ، 3.3 قيم حقيقية لجميع متسلسلات ماركوف (ii) ماهي الشروط التي يجب ان تحققها المعادلتان غير السالبتين $q_j(t)$ ، $q_{j,k}(t)$ لاجل ان تكون دوال كثافة لمتسلسلة ماركوف ؟ لهذا السؤال علاقة خاصــة حيث يمكن ان تصف متسلسلة ماركوف بواسطة دوال كثافتها . على ضوء الحقيقة التالية لاية حالة j وزمن t

$$1 - p_{j,j}(t,t+h) - \sum_{k \neq j} p_{j,k}(t,t+h) = 0 \qquad (3.19)$$

فاننا نحتاج ان تحقق دوال الكثافة ، لاي حالة j وزمن k مايلي :

$$q_j(t) = \sum_{k \neq j} q_{j,k}(t). \qquad (3.20)$$

اذا اعطيت مجموعة من الدوال المستمرة غير السالبة $q_j(t)$ ، $q_{j,k}(t)$ التي تحقق معادلة 3.20 فانه يمكن ان نثبت وجود مجموعة من الدوال غير السالبـــة $p_{j,k}(s,t)$ تحقق المعادلات التفاضلية لكولموكروف 3.12، 3.16, معادلات جابمان – كولموكروف ، ومعادلتي 3.2 ، 3.3 لاتمثل الدوال $p_{j,k}(s,t)$. بالضرورة توزيعات احتمالية لانه قد يحدث ان يكون

$$\sum_k p_{j,k}(s,t) < 1. \qquad (3.21)$$

نستطيع ان نثبت وجود المعادلة 3.21 ان وجد احتمال موجب لحدوث عدد لانهائي من الانتقالات في الفترة الزمنية من s الى t . يطلق على عملية ماركوف التي تحقـــق المعادلة 3.21 بانها *dishonest* او *pathological* .

في هذا التوضيح الموجز للنظرية العامة لمتسلسلات ماركوف ، كان هدفنا توضيـح بعض من الاسئلة التي تكون اسس نظرية متسلسلات ماركوف . في النهاية يجب ان ندرس متسلسلات ماركوف التي تظهر عندما نفترض اشكال مختلفة مبسطة لدوال الكثـــافة .

متسلسلات ماركوف المتجانسة :

اذا كانت دالتا الكثافة $q_j(t)$ ، $q_{j,k}(t)$ متجانستين فانه من السهولة التأكد من ان حلول $p_{j,k}(s,t)$ لمعادلتي تفاضل كولموكروف المرقمتين 3.12 ، 3.16 عبارة عن دوال للفرق الزمني بين s ، t

ونتيجة لذلك ستكون متسلسلة ماركوف متجانسة . للحصول على الاحتمالات الانتقالية

$$p_{j,k}(t) = P[X_{t+u} = k \mid X_u = j] \tag{3.22}$$

نجد حلول معادلة تفاضل كولموكروف المرقمة 3.12 :

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{j,k}(t) = -q_k\, p_{j,k}(t) + \sum_{i \neq k} p_{j,i}(t)\, q_{i,k}. \tag{3.23}$$

7-4 متسلسلات ماركوف ذات المرحلتين وعمليات الولادة :

في هذا البند نبين كيف يمكن ايجاد الحل لمعادلات كولموكروف التفاضلية للحصول على دالة الاحتمال الانتقالية لمتسلسلة ماركوف ذات المرحلتين وعمليـة الـولادة .

متسلسلات ماركوف ذات المرحلتين :

افرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف متجانسة بحيث لكل t تكون قيم $X(t)$ تساوي صفر او واحد .

(في البند 1-4 بينا كيفية ظهور هذه العمليات بصورة طبيعية عند دراسة انظمة الاداء وضوضاء شبه الموصل) . افرض ان كثافات العبور من الصفر والواحد تكون كما يلي :

$$q_0 = \lambda, \quad q_1 = \mu. \tag{4.1}$$

ومن ذلك يتبين ان كثافات الانتقال كما يلي :

$$q_{0,1} = \lambda, \quad q_{1,0} = \mu. \tag{4.2}$$

معادلات ماركوف التفاضلية 3.23 تصبح كما يلي :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} p_{0,0}(t) &= -\lambda\, p_{0,0}(t) + \mu\, p_{0,1}(t),\\
\frac{\partial}{\partial t} p_{0,1}(t) &= -\mu\, p_{0,1}(t) + \lambda\, p_{0,0}(t),\\
\frac{\partial}{\partial t} p_{1,1}(t) &= -\mu\, p_{1,1}(t) + \lambda\, p_{1,0}(t),\\
\frac{\partial}{\partial t} p_{1,0}(t) &= -\lambda\, p_{1,0}(t) + \mu\, p_{1,1}(t).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

بما ان $p_{0,1}(t) = 1 - p_{0,0}(t).$ اذن تكتب المعادلة الاولى كما يلي :

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{0,0}(t) = -(\lambda + \mu)\, p_{0,0}(t) + \mu,\ 0 \leq t < \infty. \tag{4.4}$$

ان الصيغة 4.4 عبارة عن معادلة تفاضلية عادية (حيث $[g(t) = p_{0,0}(t), \nu = \lambda + \mu, h(t) = \mu]$ كما يلي :

$$g'(t) = -\nu\, g(t) + h(t),\ a \leq t < \infty, \tag{4.5}$$

والتي نحصل على حلولها باستخدام النظرية الاتية :

نظرية : 4 A

الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات الدرجة الاولى

اذا كانت $g(t)$ عبارة عن حل للمعادلة التفاضلية (4.6) $a \leq t \leq b$ و $g'(t) + \nu\, g(t) = h(t)$ حيث ν عدد حقيقي و $h(t)$ دالة مستمرة فان

$$g(t) = \int_a^t e^{-\nu(t-s)} h(s)\, ds + g(a)\, e^{-\nu(t-a)},\ a \leq t \leq b. \tag{4.7}$$

البرهان :

اذا عرفنا

$$G(t) = e^{\nu t} g(t). \tag{4.8}$$

فان $g'(t) = e^{-\nu t} G'(t) - \nu\, e^{-\nu t} G(t)$ ، $g(t) = e^{-\nu t} G(t)$

وعلى ذلك فان $g'(t) + \nu\, g(t) = e^{-\nu t} G'(t)$. من حقيقة صحة المعادلة 4.6

فان $G(t)$ تحقق

$$e^{-\nu t}\, G'(t) = h(t). \tag{4.9}$$

للمعادلة التفاضلية 4.9 الحل الآتي :

$$G(t) = \int_a^t e^{\nu s}\, h(s)\, ds + G(a). \tag{4.10}$$

نحصل من المعادلة 4.8 و 4.10 على المعادلة 4.7 .

نحصل من المعادلات 4.4 ,4.7 وشرط المحدودية $p_{0,0}(0) = 1$ على

$$p_{0,0}(t) = \mu \int_0^t e^{-(\lambda+\mu)(t-s)}\, ds + e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{4.11}$$

باستخدام المعادلة 4.11 نحصل على النتائج التالية :

افرض ان $\{X(t), t \geq 0\}$ عبارة عن متسلسلة ماركوف ذات الحالـــة $\{0, 1\}$ وكثافة عبوره موضحة بالمعادلة 4.1. فانه لاي $s, t \geq 0$, يكون

$$\begin{aligned}
p_{0,0}(t) &= P[X(t+s) = 0 \mid X(s) = 0] = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)t}, \\
p_{1,0}(t) &= P[X(t+s) = 0 \mid X(s) = 1] = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\, (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}), \\
p_{0,1}(t) &= P[X(t+s) = 1 \mid X(s) = 0] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, (1 - e^{-(\lambda+\mu)t}), \\
p_{1,1}(t) &= P[X(t+s) = 1 \mid X(s) = 1] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\, e^{-(\lambda+\mu)t}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

افرض ان $p_0 = P[X(0) = 0]$ فانه من المعادلة 4.12 نجد ان

$$E[X(t)] = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \left(p_0 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-(\lambda+\mu)t}, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[X(s), X(s+t)] &= E[X(s)]\, \{p_{1,1}(t) - E[X(s+t)]\} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)t} \left\{\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} - p_0\right) e^{-(\lambda+\mu)s}\right\} \left\{\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(p_0 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-(\lambda+\mu)s}\right\}.
\end{aligned}$$

افرض ان $\beta(t)$ عبارة عن نسبة (كسر) الوقت خلال الفترة من صفر الى t التي تكون فيها قيمة العملية التصادفية تساوي 1 وان $t \geq 0$. يمكن ان نعبر عن $\beta(t)$ كما يلي :

$$\beta(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(u)\, du.$$

نحصل من المعادلة 4.13 عندما تقترب t الى ∞ على مايلي :

$$E[\beta(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t E[X(u)]\, du \to \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \tag{4.14}$$

$$t \operatorname{Var}[\beta(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^t \operatorname{Cov}[X(u), X(v)]\, du\, dv \to \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^3}.$$

بالامكان اثبات في حالة كون t كبيرة ان $\beta(t)$ تقريباً موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط وتباين يحققان معادلة 4.14 . يمكن ملاحظة ان ، معادلة 4.14 عبارة عن حالة خاصة لنظرية 4B في الفصل الاول ، حيث U موزعة توزيعاً اسياً بمعدل $1/\lambda$ ، V موزعة اسياً بمعدل $1/\mu$.

عمليات الولادة :

يقال ان عملية الولادة والوفيات عملية ولادة فقط عندما تكون $\mu_n = 0$ لجميع قيم n (عدم حدوث وفيات) ، عندما تكون لدينا عملية ولادة فقط فان المعادلات التفاضلية لدوال الاحتمال الانتقالية $p_{m,n}(t)$ ستكون كما يلي :

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{m,n}(t) = -\lambda_n\, p_{m,n}(t) + \lambda_{n-1}\, p_{m,n-1}(t) \quad \text{for} \quad n \geq m+1, \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{m,m}(t) = -\lambda_m p_{m,m}(t). \tag{4.16}$$

باستخدام نظرية 4A نحصل على النتائج الاتية :

نظرية 4B

دوال الاحتمال الانتقالية لعملية الولادة فقط :

حل المعادلة 4.16 هو

$$p_{m,m}(t) = e^{-\lambda_m t},$$

بينما حل المعادلة 4.15 هو

$$p_{m,n}(t) = e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n s}\, \lambda_{n-1}\, p_{m,n-1}(s)\, ds; \qquad n \geq m+1,$$

مثال 4A

عملية الولادة بمعدل ثابت $\lambda_n = \nu$ كعملية بواسون بكثافة ν

باستخدام نظرية 4B يمكننا ان بين وباستخدام الاستنتاج الرياضي ان دالة الاحتمال الانتقالي لعملية الولادة فقط $\{N(t), t \geq 0\}$ بمعدل ولادة ثابت ν (اي ان $\lambda_n = \nu$ لجميع قيم n) تكون كما يلي :

$$p_{m,n}(t) = e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^{n-m}}{(n-m)!} \quad \text{for} \quad n \geq m \tag{4.17}$$

$= 0,$ فيما عدا ذلك

تعني معادلة 4.17 بعبارة ثانية ان الزيادة $N(t+s) - N(s)$ الحاصلة في حجم المجتمع في فترة زمنية طولها t موزعة حسب توزيع بواسون بمعدل νt, بغض النظرعن حجم المجتمع في بداية الفترة الزمنية . بالرموز لاي زمن $t > s$ ولاي عددين صحيحين m, k فان

$$P[N(t) - N(s) = k \mid N(s) = m] = e^{-\nu(t-s)} \frac{\{\nu(t-s)\}^k}{k!}. \qquad (4.18)$$

من المعادلة 4.18 نستنتج ان $N(t)$ موزعة حسب توزيع بواسون بمعدل νt .

لكي نبرهن ان عملية الولادة $N(\cdot)$ بمعدل ولادة ثابت هي عبارة عن عملية بواسون ، نحتاج ان نبرهن ان لـ $N(\cdot)$ زيادات مستقلة independent increments لاي زمن $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

[افرض ان $N(0) = 0$] ان

$$\begin{aligned} &P[N(t_1) - N(t_0) = k_1, \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n] \\ &= P[N(t_1) = k_1]\, P[N(t_2) - N(t_1) = k_2 \mid N(t_1) = k_1] \cdots \\ &\qquad P[N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n \mid N(t_1) = k_1, \cdots, N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}) = k_{n-1}] \\ &= P[N(t_1) = k_1]\, P[N(t_2) - N(t_1) = k_2] \cdots P[N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n], \end{aligned}$$

والذي يبرهن ان لـ $\{N(t), t \geq 0\}$ زيادات مستقلة

مثال 4B

عملية الولادة ذات معدل ولادة خطي :

افترض وجود مجتمع يتكاثر افراده (بالانشطار اوباية طريقة اخرى) الى افراد جدد بدون حدوث وفيات بين افراد ذلك المجتمع . افترض ان احتمال تكوين فرد جديد من فرد قديم خلال فترة زمنية صغيرة طولها h يساوي λh تقريبا . بصورة ادق ، افرض اذا كانت $N(t)$ عبارة عن حجم المجتمع عند الزمن t, فان $\{N(t), t \geq 0\}$. عبارة عن عملية ولادة بمعدل كما يلي :

$$\lambda_n = n\lambda \quad \text{for} \quad n = 0, 1, \cdots. \qquad (4.19)$$

باستخدام نظرية 4B, نستطيع ان نثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي عندما $n \geq m \geq 1$ ان

$$p_{m,n}(t) = \binom{n-1}{n-m} (e^{-\lambda t})^m (1 - e^{-\lambda t})^{n-m}. \qquad (4.20)$$

بعبارة ثانية ، تعني المعادلة 4.20 ان الزيادة $N(t+s) - N(s)$ الحاصلة في

حجم المجتمع خلال فترة زمنية طولها t تكون موزعة حسب توزيع ذات الحدين السالب بمعلمين $r = m,\ p = e^{-\lambda t}$ حيث m قيمة $N(s)$
ونتيجة لذلك فان

$$E[e^{iu\{N(t+s)-N(s)\}} \mid N(s) = m] = \left\{\frac{e^{-\lambda t}}{1-(1-e^{-\lambda t})e^{iu}}\right\}^m \qquad (4.21)$$

$$E[N(t+s) - N(s) \mid N(s) = m] = me^{\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}), \qquad (4.22)$$

$$\mathrm{Var}[N(t+s) - N(s) \mid N(s) = m] = me^{2\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}). \qquad (4.23)$$

اذا كان الحجم الابتدائي للمجتمع m, بحيث ان $N(0) = m,$ فان التوقعات الشرطية السابقة (عندما $s = 0$) تساوي على التوالي .

$$\mathrm{Var}[N(t) - N(0)],\ E[N(t) - N(0)],\ \varphi_{N(t)-N(0)}(u),\ N(0) = m$$

اذا علمت ان $N(0) = m,$ فان

$$E[N(t)] = E[N(t) - N(0)] + m = me^{\lambda t}, \qquad (4.24)$$

$$\mathrm{Var}[N(t)] = \mathrm{Var}[N(t) - N(0)] = me^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1). \qquad (4.25)$$

يطلق على عملية الولادة ذات معدل الولادة الخطي في بعض الاحيان بعملية يول Yule او عملية فيري Furry

انها استخدمت بصورة اساسية من قبل يول في سنة (1924) في نظرية التطور الرياضية ومن قبل فيري سنة (1937) كنموذج لارسال الاشعة الكونية في تطبيقات يول كانت $N(t)$ تمثل صفوف الجنس الحيواني او النباتي .يفترض عند تكون جنس من الاجناس ان هذا الجنس سيبقى وانه اذ كانت $N(t)$ تمثل عدد الاجناس الموجودة عند الزمن t, .

فان $\lambda N(t)\,h$ عبارة عن احتمال تكوين جنس جديد ، بالتغير الوراثي ، في الفترة من t الى $t + h$.

فان اهتمام يول يتجلى حول عدد الصفوف التي تمتلك n من الاجناس عند الزمن المعلوم T .

افرض تكون صنوف جديدة عند الازمنة $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ والتي تحدث حسب عملية بواسون غير المتجانسة بقيمة وسطية للدالة كما يلي :

$$m(t) = N_0\, e^{\alpha t}, \qquad (4.26)$$

حيث N_0 ، α كميتان ثابتتان افرض ان $X^{(n)}(T)$ عبارة عن عدد الصفوف التي لها n جنس عند الزمن T .يمكن ان تكتب $X^{(n)}(T)$ كعملية لبواسون مصفاة fil tered process (كما معرفة في البند 4-5) بالشكل الاتي .

$$X^{(n)}(T) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{(n)}(T, \tau_m), \tag{4.27}$$

حيث $W_m^{(n)}(T, \tau_m) = 1$ يساوي n اوصفرعند وجود جنس عند الزمن τ_m للصنف المتكون عند الزمن T اوعدم وجود جنس عند الزمن τ_m , للصنف المتكون عند الزمن T على التوالى نحصل من المعادلة 4.20 على

$$\begin{aligned} E[W^{(n)}(t,\tau)] &= p_{1,n}(t-\tau) \\ &= e^{-\lambda(t-\tau)} \{1 - e^{-\lambda(t-\tau)}\}^{n-1} \end{aligned} \tag{4.28}$$

نحصل على العدد المتوقع للصنوف التي لها n جنس عند الزمن T كما يلي :

$$\begin{aligned} E[X^{(n)}(T)] &= \int_0^T E[W^{(n)}(T,\tau)]\, dm(\tau) \\ &= \int_0^T e^{-\lambda(T-\tau)} \{1 - e^{-\lambda(T-\tau)}\}^{n-1} \{N_0\, \alpha\, e^{\alpha\tau}\}\, d\tau. \end{aligned} \tag{4.29}$$

عندما تكون قيم T, كبيرةجدا فان $E[X^{(n)}(T)]$ ستكون عبارة عن عامل كمية ثابتة لايعتمد على n. ويساوي تقريبا

$$\int_0^1 (1-y)^{n-1}\, y^{\alpha/\lambda}\, dy. \tag{4.30}$$

اذن

$$\frac{E[X^{(1)}(T)]}{\sum_{n=1}^{\infty} E[X^{(n)}(T)]} = \frac{\int_0^1 y^{\alpha/\lambda}\, dy}{\int_0^1 y^{(\alpha/\lambda)-1} dy} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}. \tag{4.31}$$

باستخدام المعادلة 4.31 نستطيع الحصول على اسلوب لتقدير النسبة λ/α, التي تعتبر مقياساً لسرعة ظهور اجناس جديدة عند المقارنة بظهور صنف جديد . وذلك باستقصاء الملاحظات (المشاهدات) في فترة زمنية معينة. احسب عدد الصنوف M عند زمن معلوم في عائلة معينة (مجموعة من الصنوف) وعدد الصنوف M_1 التي لها جنس واحد فقط . اذا علمت بوجود هذه الاصناف لفترة زمنية طويلة وان M_1 و M كبيرتان فان النسبة M_1/M تساوي تقريبا الجهة اليسرى من المعادلة 4.31 . نحصل على حل للمعادلة

$$\frac{M_1}{M}=\frac{1}{1+(\lambda/\alpha)}$$

كما يلي :

$$\frac{\lambda}{\alpha}=\frac{M-M_1}{M_1}. \qquad (4.32)$$

طبق يول هذا الاسلوب على عائلة من الخنفساء تحتوي على 627 صنفاً ، حيث 34.29% منها لها جنس واحد فقط . نحصل على تقدير الى λ/α يساوي 1.9، يـراجع القارئ بحث يول للحصول على معلومات حول هذه الاسئلة

التمارين :

4.1 اعتبر عملية الولادة $\{N(t), t \geq 0\}$ ذات معدل الولادة الثابت ν التي لهـا حجم اعلى محدود M (اي ان λ_n يساوي ν او صفر تبعا لكون $n < M$ او $n \geq M$) عندما $t > s > 0$, اوجد دالة كتلة الاحتمال المشروط لـ $N(t)-N(s)$, اذا علمت ان $N(s)=k$.

4.2 عملية الوفاة Pure death process يطلق على عملية الولادة والوفاة عندما $\lambda_n=0$ ، $\mu_n=n\mu$ حيث $n=0, 1, \cdots$ بعملية الوفاة pure death process ذات معدل الولادة الخطي . اوجد

(i) دالة الاحتمال الانتقالي $p_{m,n}(t)$,

(ii) $E[N(t) \mid N(0)=m]$, (iii) $\mathrm{Var}[N(t) \mid N(0)=m]$

افرض في التمارين 4.3 الى 4.5 ان $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عـن عملية ولادة ذات معدل ولادة خطي كما في المثال 4B

4.3 اثبت صحة المعادلة 4.20

4.4 افرض ان $N(0)$ عبارةعن متغير عشوائي ، ذو توزيع هندسي بالمعلم p (اي ان $P[N(0)=n]=p(1-p)^{n-1}$ حيث $n=1, 2, \cdots$) اوجد $E[N(t)]$ ، $\mathrm{Var}[N(t)]$

4.5 افترض ان $N(0)=1$ اوجد (i) $\mathrm{Cov}[N(s), N(t)]$; (ii) $\varphi_{N(s), N(t)}(u,v)$

تلميح : اثبت واستخدم الحقيقة الاتية :

$$\varphi_{N(s), N(t)}(u,v)=E[e^{i(u+v)N(s)}E[e^{iv(N(t)-N(s))} \mid N(s)]].$$

7-5 . عمليات الولادة والوفيات غير المتجانسة :

هناك عدد من الاساليب المتاحة لاستخراج دوال الاحتمال الانتقالية لعملية الولادة والوفاة المتجانسة

(راجع بصورة خاصة بحوث Ledermann Reuter سنة [1953] McGregor Karlin سنة [1957] والبحوث الاخيرة لهؤلاء المؤلفين) .نوضح في هذا البند بصورة موجزة استخدام الدوال المولدة للاحتمال لايجاد الاحتمالات الانتقالية حيث انها تبدو الطريقة الوحيدة لايجاد تلك الاحتمالات في حالتي العمليات المتجانسةوغير المتجانسة .

يعتبر هذا البند ايضا مقدمة لوضع معادلات التفاضل الجزئية للدوال المولدة للاحتمال ولدوال الخاصية . (للحصول على شرح وافي لهذا الاسلوب وكيفية تطوره تأريخيا ، Bartlett سنة [1949] , p. 219 , Bartlett [1955] , Syski سنة [1960]) .

يقال ان العملية ذات القيمة العددية $\{N(t), t \geq 0\}$ عبارة عن عملية ولادة ووفاة غير متجانسة اذا كانت عبارة عن متسلسلة ماركوف بدالة احتمال انتقالي كما يلي

$$p_{m,n}(s,t) = P[N(t) = n \mid N(s) = m] \qquad (5.1)$$

محققة الافتراضات الاتية .وجود دوال غير سالبة

$$\lambda_0(t), \lambda_1(t), \cdots \quad \text{and} \quad \mu_1(t), \mu_2(t), \cdots \qquad (5.2)$$

بحيث تتحقق صحة الغايات الاتية ـ لكل t المنتمية بصورة منتظمة الى n :

$$\underset{h\to 0}{\text{غا}} \frac{p_{n,n+1}(t, t+h)}{h} = \lambda_n(t) \qquad \text{for} \quad n \geq 0, \qquad (5.3)$$

$$\underset{h\to 0}{\text{غا}} \frac{p_{n,n-1}(t, t+h)}{h} = \mu_n(t) \qquad \text{for} \quad n \geq 1,$$

$$\underset{h\to 0}{\text{غا}} \frac{1 - p_{n,n}(t, t+h)}{h} = \lambda_n(t) + \mu_n(t) \quad \text{for} \quad n \geq 0,$$

حيث نعرف لكل $t \geq 0$, ما يلي :

$$\mu_0(t) = 0. \qquad (5.4)$$

يقال ان عملية الولادة والوفاة عباوة عن .

(i) عمليات متجانسة اذا كانت لاتعتمد على t, لجميع قيم $n, \lambda_n(t)$, $\mu_n(t)$

(ii) عملية ولادة اذا كانت

$$\mu_n(t) = 0 \qquad n, \quad t \tag{5.5}$$

(iii) عملية وفاة اذا كانت

$$\lambda_n(t) = 0 \qquad \text{لجميع قيم } t \text{ ، } n . \tag{5.6}$$

بعبارة اخرى ، تعني معادلة 5.3 انه في كل فترة زمنية صغيرة فان حجم المجتمع الممثل بـ $N(t)$ اما يزداد بمقدار وحدة واحدة او يقل بمقدار وحدة واحدة او يبقى كما هو. يعتمد الاحتمال المشروط لزيادة حجم المجتمع بمقدار وحدة واحدة (ولادة) على كل من زمن مشاهدة العملية وحجم المجتمع n نرمز لاحتمال الولادة المشروط بالرمز $\lambda_n(t)$ (او بدقة اكثر $\lambda_n(t)\,h + o\,(h)$] [. بنفس الطريقة نرمز لاحتمال الوفاة المشروط بالرمز $\mu_n(t)$ لانه يعتمد ايضاً على n ، t .

نحصل من المعادلات التفاضلية لكولموكروف على معادلات تفاضل لدالة الاحتمال الانتقالية $p_{m,n}(s,t)$ لعملية الولادة والوفاة غير المتجانسة لاجل الحصول على حل للمعادلات الناتجة فانه من المناسب ان نحصل على معادلة تفاضل جزيئة للدالة المولدة للاحتمال الانتقالي وكما يلي :

$$\psi_{j,s}(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_{j,k}(s,t) \tag{5.7}$$

معرفة لان حالة j, وزمن $s < t$, و $|z| \leq 1$

<u>نظرية 5A</u>

<u>معادلة التفاضل الجزئية للدالة المولدة للاحتمال الانتقالي لعملية الولادة والوفاة</u>

لاية حالة ابتدائية j, زمن $s < t$ و $|z| \leq 1$ فان

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{j,s}(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_{j,k}(s,t)\{(z-1)\lambda_k(t) + (z^{-1}-1)\mu_k(t)\} \tag{5.8}$$

بشرط الحدودية boundary condition الاتي :

$$\psi_{j,s}(z,s) = z^j \qquad \text{اذا كانت} \qquad P[N(s) = j] = 1 \tag{5.9}$$

في حالة خاصة ومهمة ولبعض الدوال $\lambda(t)$ و $\mu(t)$ عندما

$$\lambda_n(t) = n\,\lambda(t), \qquad \mu_n(t) = n\,\mu(t) \tag{5.10}$$

فان

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{j,s}(z,t) = \frac{\partial}{\partial z}\psi_{j,s}(z,t)\{(z-1)[z\,\lambda(t) - \mu(t)]\}. \tag{5.11}$$

البرهان :

لاحظ اولا عندما تقترب h الى صفر فان

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\{E[z^{N(t+h)-N(t)} \mid N(t)=k] - 1\}\\ &= \frac{1}{h}\{z\,p_{k,k+1}(t,t+h) + z^{-1}\,p_{k,k-1}(t,t+h) + p_{k,k}(t,t+h) - 1 + o(h)\}\\ &\to (z-1)\,\lambda_k(t) + (z^{-1}-1)\,\mu_k(t).\end{aligned}$$

اذن عندما $h \to 0$, فان

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\{\psi_{j,s}(z,t+h) - \psi_{j,s}(z,t)\}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{1}{h}\,\{E[z^{N(t+h)-N(t)} \mid N(t)=k] - 1\}\,p_{j,k}(s,t)\\ &\to \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_{j,k}(s,t)\,\{(z-1)\,\lambda_k(t) + (z^{-1}-1)\,\mu_k(t)\}.\end{aligned}$$

للحصول على معادلة 5.11 لاحظ ان

$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^k p_{j,k}(s,t) = z\frac{\partial}{\partial z}\psi_{j,s}(z,t),$$

$$\begin{aligned}\lambda(t)\,z(z-1) + \mu(t)\,z(z^{-1}-1) &= \lambda(t)\,z^2 - [\lambda(t)+\mu(t)]\,z + \mu(t)\\ &= \{\lambda(t)\,z - \mu(t)\}\,(z-1).\end{aligned}$$

وهو المطلوب اثباته .

نستخدم النظرية الاتية لكي نجد حلاً لمعادلة التفاضل الجزئية ,5.11

نظرية : 5B

افترض ان الدالة المولدة للاحتمال تحقق معادلة التفاضل الجزئية الاتية :

$$\frac{\partial \psi_{j,s}(z,t)}{\partial t} = a(z,t)\,\frac{\partial \psi_{j,s}(z,t)}{\partial z} \qquad (5.12)$$

وفقا الى الشرط المحدود معادلة .5.9 .افرض ان $u(\cdot,\cdot)$ عبارة عن دالة بحيث يكون الحل $z(t)$ لمعادلة التفاضل

$$\frac{dz}{dt} + a(z,t) = 0 \qquad (5.13)$$

يحقق

$$u(z,t) = \text{كمية ثابتة} \qquad (5.14)$$

عرف دالة $g(\cdot)$ كما يلي :

$$g(z) = u(z,s), \qquad (5.15)$$

وافرض ان $g^{-1}(\cdot)$ عبارة عن دالة مقلوب $g(\cdot)$

وكما يلي :

$$g^{-1}(x) = z \quad \text{اذا كانت} \quad x = g(z). \quad \text{اذن} \qquad (5.16)$$

$$\psi_{j,s}(z,t) = \{g^{-1}(u(z,t))\}^{j}. \qquad (5.17)$$

برهان النظرية : 5 A برهان النظرية 5B يقع خار ج نطاق هذا الكتاب . انها عبارة عن تطبيق لطريقة لاكرنج Lagrange's لحل معادلة التفاضل الجزئية من الدرجة الاولى.
تجد برهان نظرية 5B في كتاب (1960) Syski ص 696

مثال 5A

عملية الولادة ذات معدل الولادة الخطي :

لكي يتبين كيفية استخدام نظرية 5B لحل معادلة التفاضل الجزئية 5.11 اعتبر عملية نموخطية غيرمتجانسة والتي عبارة عن عملية ولادة بمعدل $\lambda_n(t) = n\,\lambda(t)$ ان معادلة 5.11 ستكون كما يلي :

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{j,s}(z,t) = \frac{\partial}{\partial z}\psi_{j,s}(z,t)\{z(z-1)\lambda(t)\} \qquad (5.18)$$

والتي عبارة عن معادلة 5.12 عندما

$$a(z,t) = z(z-1)\,\lambda(t)$$

ان معادلة التفاضل العادية

$$\frac{dz}{dt} + z(z-1)\,\lambda(t) = 0 \qquad (5.19)$$

يمكن ان تكتب كما يلي

$$\frac{dz}{z(z-1)} + \lambda(t)\,dt = 0. \qquad (5.20)$$

عند تكامل معادلة 5.20 نحصل على كمية ثابتة = $\log(1-z^{-1}) + \int \lambda(t)\,dt$

اذن اي حل $z(t)$ للمعادلة 5.19 يحقق كمية ثابتة= $u(z,t)$ عرف $u(z,t)$ كما يلي

$$u(z,t) = \log(1-z^{-1}) + \rho(t), \qquad (5.21)$$

حيث

$$\rho(t) = \int_0^t \lambda(t')\,dt'. \qquad (5.22)$$

لاجل الحصول على حل الى $g^{-1}(\cdot)$ المعرفة بالمعادلة 5.16 نكتب

$$x = u(z,s) = \log(1-z^{-1}) + \rho(s),$$

وهذا يعني ان

$$1 - z^{-1} = \exp\{x - \rho(s)\},$$

وايضا هذا يعني ان

$$g^{-1}(x) = z = (1 - \exp\{x - \rho(s)\})^{-1}.$$

اذن

$$\begin{aligned} g^{-1}(u(z,t)) &= (1 - \exp\{\log(1-z^{-1}) + \rho(t) - \rho(s)\})^{-1} \\ &= (1 - (1-z^{-1})\exp\{\rho(t) - \rho(s)\})^{-1}. \end{aligned}$$

او

$$g^{-1}(u(z,t)) = \frac{z\,e^{-\{\rho(t)-\rho(s)\}}}{1 - z(1 - e^{-\{\rho(t)-\rho(s)\}})}. \qquad (5.23)$$

الدالة المولدة للاحتمال الانتقالي $\psi_{i,s}(z,t)$ تساوي القوة i في المعادلة 5.23.
ان الجهة اليمنى من المعادلة 5.23 عبارة عن الدالة المولدة للاحتمال للتوزيع الهندسي ذي المعلم

$$p = e^{-\{\rho(t)-\rho(s)\}} \qquad (5.24)$$

وهكذا فان

$$p_{1,n}(s,t) = e^{-\{\rho(t)-\rho(s)\}}(1 - e^{-\{\rho(t)-\rho(s)\}})^{n-1}, \qquad (5.25)$$

والتي تكون اشمل من معادلة 4.20. بشمولية اكثر

$$p'_{m,n}(s,t) = \binom{n-1}{n-m} p^m (1-p)^{n-m}, \qquad (5.26)$$

حيث p مبينة بالمعادلة 5.24.

مثال 5B

عملية الولادة والوفاة عندما $\lambda_n(t) = n\,\lambda(t)$ ، $\mu_n(t) = n\,\mu(t)$

ان المعادلة المولدة للاحتمال الانتقالي تحقق المعادلة 5.11. نجد اولا الحل العام لمعادلة التفاضل العادية 5B,

$$\frac{dz}{dt} + (z-1)\,\{z\,\lambda(t) - \mu(t)\} = 0. \qquad (5.27)$$

وذلك باتباع الخطوات الموضحة في النظرية 5B .

لاحظ Kendall سنة (1948) ان هذه المعادلة اعلاه يمكن ان تحل باستخدام طريقة استبدال المتغيرات $s = (z-1)^{-1}$,

حيث ستكون المعادلة كما يلي :

$$\frac{ds}{dt} + \{\mu(t) - \lambda(t)\}\,s = \lambda(t)$$

بحل عام (قارن نظرية 4A)

كمية ثابتة = $s\ e^{\rho(t)} - \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)}\, d\tau$

عرف $\rho(t) = \int_0^t \{\mu(\tau) - \lambda(\tau)\}\, d\tau.$

ان اى حل $z(t)$ للمعادلة 5.27 يحقق

كمية ثابتة = $u(z,t)$

حيث

$$u(z,t) = \frac{1}{z-1}\, e^{\rho(t)} - \int_0^t \lambda(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau.$$

للحصول على حل الى $g^{-1}(\cdot)$ المعرفة بالمعادلة 5.16 اكتب

$$x = u(z,s) = \frac{1}{z-1} e^{\rho(s)} - \int_0^s \lambda(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau,$$

والتي تعني ان

$$g^{-1}(x) = z = 1 + \left\{x\, e^{-\rho(s)} + e^{-\rho(s)} \int_0^s \lambda(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau\right\}^{-1}.$$

اذن

$$g^{-1}(u(z,t)) = 1 + \left\{\frac{1}{z-1} e^{\rho(t)-\rho(s)} - e^{-\rho(s)} \int_s^t \lambda(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau\right\}^{-1}. \quad (5.28)$$

ان الدالة المولدة للاحتمال الانتقالي $\psi_{j,s}(z,t)$ تساوي القوة j في المعادلة 5.28.

$$\psi_{1,0}(z,t) = 1 + \left\{\frac{1}{z-1} e^{\rho(t)} - \int_0^t \lambda(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau\right\}^{-1}. \quad (5.29)$$

بصورة خاصة :

نحصل على احتمال انقراض المجتمع عند الزمن t من المعادلة 5.29. عندما نضع $z = 0$.اذن نستنتج ان .

$$P[X(t)=0 \mid X(0)=1] = \frac{e^{\rho(t)} + \int_0^t \lambda(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau - 1}{e^{\rho(t)} + \int_0^t \lambda(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau}$$

$$= \frac{\int_0^t \mu(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau}{1 + \int_0^t \mu(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau},$$

لان.

$$\int_0^t \{\mu(\tau) - \lambda(\tau)\} e^{\rho(\tau)}\, d\tau = e^{\rho(t)} - 1.$$

وهكذا نرى ان احتمال انقراض المجتمع نهائياً يساوي 1, اي ان :

$$\lim_{t\to\infty} P[X(t) = 0 \mid X(0) = 1] = 1,$$

اذا كانت

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mu(\tau)\, e^{\rho(\tau)}\, d\tau = \infty.$$

والعكس صحيح

تمارين :

5.1 عملية الولادة ووجود الهجرة *Pure birth process with immigration*

افرض عملية ولادة $\{N(t), t \geq 0\}$ بدالة كثافة

$$\lambda_n(t) = \nu(t) + n\lambda(t), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

يمكن ان نعتبر $N(t)$ عبارة عن حجم المجتمع عند الزمن t حيث ان افراد ذلك المجتمع يهاجرون حسب عملية بواسون بدالة كثافة تساوي $\nu(t)$ حيث ان هذا المجتمع يعطي اجيال جديدة حسب عملية الولادة بمعدل ولادة خطي .

اثبت ان

$$\psi_{j,s}(z,t) = z^{-\nu(t)/\lambda(t)} \left\{\frac{zp}{1-zq}\right\}^{j+\{\nu(s)/\lambda(s)\}},$$

حيث

$$p = e^{-\{\rho(t)-\rho(s)\}}, \qquad q = 1-p,$$

$$\rho(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du.$$

تلميح :يمكن استخدام اما نظرية عمليات بواسون المصفاة ،

او استخدام حقيقة ان الدالة المولدة للاحتمال تحقق

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{j,s}(z,t) = z\,(z-1)\,\lambda(t)\frac{\partial}{\partial z}\,\psi_{j,s}\,(z,t) + (z-1)\,\nu(t)\,\psi_{j,s}(z,t).$$

5.2 عملية الولادة والوفاة ذات معدلات ولادة و وفاة خطية .اعتبر عملية الولادة والوفاة غير المتجانسة عندما

$$\lambda_n(t) = n\,\lambda(t), \qquad \mu_n(t) = n\,\lambda(t).$$

اثبت : (i) ان الدالة المولدة للاحتمال لحجم المجتمع تحقق

$$\frac{\partial\psi_{j,s}(z,t)}{\partial t} = \lambda(t)\,(z-1)^2\,\frac{\partial\psi_{j,s}(z,t)}{\partial z},$$

(ii) وان

$$\psi_{1,0}(z,t) = \frac{\dfrac{\rho(t)}{1+\rho(t)} + z\,\dfrac{1-\rho(t)}{1+\rho(t)}}{1-\dfrac{\rho(t)}{1+\rho(t)}\,z},$$

حيث $\rho(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du$, and

(iii) وان

عندما $t \to \infty$ اذا كانت $\rho(t) \to \infty$ ، $p_{1,0}(0,t) = \dfrac{\rho(t)}{1+\rho(t)} \to 1$.

5.3 الاحتمالات الانتقالية لعملية الولادة والوفاة بمعدلات خطية .اثبت في حالـة عملية الولاد ة والوفاة في المثال 5B عندما $n \geq 1$ ان

$$p_{1,n}(0,t) = e^{\rho(t)}\{1 - p_{1,0}(0,t)\}^2 \{1 - e^{\rho(t)}[1 - p_{1,0}(0,t)]\}^{n-1},$$

حيث $p_{1,0}(0,t) = P[X(t) = 0 \mid X(0) = 1]$

تعطي بالمعادلة 5.30 .

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem

https://archive.org/details/@hassan_ibrahem





اكمل الدكتور عدنان محمود حيدر درجة الدكتوراه في الاحصاء الرياضي والاحتمالات في الجامعة الامريكية بواشنطن في عام ١٩٧٧ . سبق ذلك أن اكمل دراسات عليا في جامعات ستانفورد في كاليفورنيا وجامعة ويسكاونسن بالاضافة الى دراسات في جامعتي اوكلاهوما وكاليفورنيا في بريكلي حيث نال خلال ذلك شهادات علمية عالية وقد نال الدكتور عدنان محمود حيدر على عدة امتيازات وتقديرات علمية وعلى سبيل المثال لا الحصر حصوله على زمالة الجمعية العلمية العالمية في امريكا وحصوله على زمالة كولبنكيان في القطر العراقي وغيرهما .

للدكتور عدنان محمود عدة ابحاث بعضها منشورة في خارج القطر وبعضها منشورة في داخل القطر العراقي كما أن الدكتور عدنان محمود عضو فعال في اكثر من جمعية علمية عالمية .

ولقد قام المعرب بالقاء بعضا من ابحاثه على شكل محاضرات علمية على زملائه من الاساتذة والباحثين في بعض الجامعات الاجنبية ومنها جامعة ويسكاونسن وجامعة ماريلاند الامريكيتين وكذلك هامبورك وجامعة كارل ماركس وجامعة درزدن الالمانية اضافة الى محاضراته في الاكاديمية العلمية الالمانية في برلين وعلى اعضاء قسم الاحصاء الرياضي التابع لمعهد تاتا في بومبي وذلك بناء على دعوتهما لذلك .

للدكتور عدنان محمود خبرات تدريسية على كافة المستويات في مجال اختصاصه في جامعتي ويسكاونسن وماريلاند الامريكيتين ولعدة سنوات ثم تدريساته وعلى كافة المستويات في مجال اختصاصه في جامعة قسنطينة وجامعة باتنه في القطر الجزائري وكذلك تدريساته لسنين عديدة في جامعتي بغداد والمستنصرية .

ان الدكتور عدنان محمود حيدر وزميله عبد ذياب جزاع الحائز على شهادة الماجستير من جامعة لندن . اذ تقدم بدراسة وتعريب كتاب نظرية الاحتمالات الحديثة وكتاب العمليات التصادفية بعد أن وجدا عدم احتواء المكتبة العربية على اي كتاب في هذين الموضوعين معربا اومؤلفا ونظرا لما لهذين الموضوعين من أهمية فان الجهد الذي بذله المعربان يمثل جهدا خاصا لما لهذين الكتابين من أهمية علمية رفيعة في مجال الاختصاص ولما للمؤلف الدكتور عمانوئيل بارزن من وزن علمي عالمي معروف وبذلك فقد حقق المعربان أملا راودهما لزمن طويل بدفع هذين الكتابين ليأخذا محلهما في المكتبة العربية ليكونا في خدمة الطالب والاستاذ والباحث العربي وليكونا التجربة الوحيدة والناجحة في هذا المضمار .

ساعدت الجامعة المستنصرية على طبعه

طبع بمطابع جامعة الموصل
مديرية مطبعة الجامعة